Promociona
Nota 9 (nueve)

1	2	3	4	Calificación
B	B	B	B	10 diez

APELLIDO Y NOMBRE: Ksuel Adoryan Magalí NO. DE LIBRETA: 1257/23

TURNO: [✓] A-K 11 a 14 hs [ ] L-Z 11 a 14 hs [ ] 16 a 19 hs [ ] 17 a 20 hs

CARRERA: Lic. ciencias de la computación

Álgebra I

Segundo Cuatrimestre - Segundo parcial - 02/12/2023

Ejercicio 1. Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(35a^{321} + 3^{2004} : 77) \neq 1$ y $6a + 9b = 9$.

Ejercicio 2. Sea $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

- $8 \mid 3n + |z^3|$
- $\arg\left(z^{7n+6}\right) = \arg(i)$

Ejercicio 3.

a) Hallar las raíces de $P = X^7 - 2X^6 - X^5 + X^2 - 2X - 1$ sabiendo que tiene raíces en común con $Q = X^7 - 2X^6 + 2X^5 + X^2 - 2X + 2$.

b) Calcular $(w^{75} - w^{17} + w^{12} + w^{107} + 1)^5$ para cada $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ raíz **no real** de P.

Ejercicio 4. Factorizar el polinomio $P = X^6 - X^5 - 13X^4 + 14X^3 + 35X^2 - 49X + 49$ como producto de irreducibles en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ sabiendo que $\sqrt{7}$ es una raíz múltiple.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas, no omita detalles, y sea claro al escribir.

Magali Kruel

HOJA N° 1

FECHA

(1) Primero analizo el dato $6a+9b=9$. Es una ecuación diofántica, por lo que para resolverla primero debo coprimizar:

$6a+9b=9 \xrightarrow[\text{coprimizo}]{} 2a+3b=3$ ✓

- Busco solución particular:
Veo que una solución particular de

$2.x_a+3.x_b=3$ es $X_a=-3$, $X_b=3$ ✓

- Busco solución homogenea:

$2.h_a+3h_b=0 \iff h_a=-3$ y $h_b=2$ ✓

- Fabrico solución general juntando particular y homogenea:

$S=\{(a,b)\in\mathbb{Z}: a=-3-3.k,\ b=3+2k \text{ para todo } k\in\mathbb{Z}\}$ ✓

Ahora analizo el dato $(35.a^{321}+3^{2004}:77)\neq 1$. Esto quiere decir que ambos números comparten al menos 1 divisor. Como $77=7.11$, debo analizar los casos correspondientes a $MCD=7$, $MCD=11$ y $MCD=77$

$\rightarrow$ Si $(35a^{321}+3^{2004}:77)=7$

$\rightarrow$ $7|35a^{321}+3^{2004} \iff 35.a^{321}+3^{2004}\equiv 0\ (7)$

Notemos que $35\equiv 0\ (7)$. Además, 7 es un número primo y $7\nmid 3$, por lo que puedo usar PTF sabiendo que si p es primo y $p\nmid a \Rightarrow a^{p-1}\equiv 1\ (p)$

Se puede decir que $7\nmid 3^n$ pues 7 es primo y $7\nmid 3$. En su lugar, usa Fermat

$\rightarrow 35.a^{321}+3^{6^{334}}\equiv 0+1^{334}\equiv 1\ (7)$. Pero mi condición no se cumple pues $35a^{321}+3^{2004}\not\equiv 0\ (7)$

Usa que $(3:7)=1$

$\rightarrow$ Concluyo que $7\nmid 35a^{321}+3^{2004}$ ✓

Como $7\nmid 35a^{321}+3^{6^{334}}$, 7.11 tampoco lo dividirá, por lo que tengo que hallar "a" tal que $11|35.a^{321}+3^{2004}$ Bien.

Lo dice en el ejemplo caso que sigue. Es consciente ✓

NOTA

$11 \mid 35.a^{321}+3^{2004} \iff 35.a^{321}+3^{2004} \equiv 0\ (11)$

↳ Si $11 \mid a$, $a \equiv 0(11)$. Como 11 es primo y $11 \nmid 3$, puedo usar PTF.

$$\underbrace{35.a^{321}}_{\equiv 0} + \underbrace{3^{10^{200}}}_{\equiv 1} . 3^4 \equiv 0+1.81 \equiv 4\ (11)$$, que no cumple

la condición pedida. Concluyo que $a \not\equiv 0(11)$

↳ Si $11 \nmid a$, por ser 11 primo (y $11 \nmid 3$), puedo usar PTF:

$$\underset{2}{35}.\underset{1}{a^{10^{32}}}.a+\underset{1}{3^{10^{200}}}.\underset{4}{3^4} \equiv 2.a+4\ (11)$$ (mod 11).

Busco a tal que $2a+4 \equiv 0(11)$:

$2.a \equiv 7\ (11)$. Uso inverso multiplicativo: $6.2.a \equiv 6.7(11) \iff \boxed{a \equiv 9(11)}$

Luego, por lo analizado anteriormente, $a \equiv 9(11)$ son los únicos valores de a que cumplen que $(35.a^{321}+3^{2004}:77) \neq 1$ ya que vimos que $7 \nmid 35a^{321}+3^{2004}$, $11 \mid 35a^{321}+3^{2004} \iff a \equiv a(11)$ y $77 \nmid 35a^{321}+3^{2004}$ ya que $77=7.11$, $(7:11)=1 \Rightarrow 7 \mid 35a^{321}+3^{2004}$, que NO se cumple.

Se que $a=9+11.q$ y que $a=-3-3.k$, entonces:

$-3-3.k \equiv 9(11) \iff -3k \equiv 12\ (11) \iff k \equiv 7\ (11)$

Luego $k=7+11.j$ y ahora mis soluciones serán:

Rta: $S=\{a,b \in \mathbb{Z} : a=-24-33j,\ b=17+22j \quad \forall j \in \mathbb{Z}\}$

NOTA

Magali Kruel

(2)

$z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \quad , \quad |z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$

- $8 \mid 3n + |z^3| \iff |z|^3 + 3n \equiv 0 \ (8) \iff 1 + 3n \equiv 0 \ (8) \iff 3n \equiv 7 \ (8)$

$\iff 3.3n \equiv 3.7 \ (8)$ (pues $3 \equiv 3 \ (8)$) $\iff n \equiv 5 \ (8)$

$(3 ; 8) = 1$

$\Rightarrow$ La primera condición se cumple sí y solo sí $n \equiv 5 \ (8)$

- $\arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}\right) = \frac{\pi}{6}$, pero como $z \in 4^{to}$ cuadrante,

$\arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ ✓

- $\arg\left(z^{7n+6}\right) = \arg(i) \iff (7n+6).\arg(z) = \arg(i) + 2k\pi \iff$

$\iff (7n+6) . \frac{11\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff (7n+6) . \frac{11\pi}{\cancel{6}} . \frac{\cancel{6}}{\pi} = \frac{\pi}{2} . \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\pi} + 2k\pi . \frac{6}{\pi} \iff$

$\iff 77n + 66 = 3 + 12.k \iff 77n = -63 + 12.k \iff 77n \equiv -63 \ (12)$

$\Rightarrow$ La segunda condición se cumple sí y sólo sí $5n \equiv 9 \ (12)$

Juntando ambas condiciones obtengo el siguiente sistema de ecuaciones de congruencia:

$$\begin{cases} n \equiv 5 \ (8) \\ 5n \equiv 9 \ (12) \end{cases} \iff \begin{cases} n \equiv 5 \ (2^3) & ① \\ 5n \equiv 9 \ (2^2) & ② \\ 5n \equiv 9 \ (3) & ③ \end{cases}$$ ✓

Veamos que $\underset{1}{5}n \equiv \underset{1}{9} \ (2^2) \iff n \equiv 1 \ (2^2)$ y que

$n \equiv 5 \ (2^3) \Rightarrow n \equiv 5 \ (2^2) \iff n \equiv 1 \ (2^2)$, por lo que la ecuación ① implica la ecuación ② $\Rightarrow$ ecuación ② es redundante y puedo sacar esa condición: Bien

$$\begin{cases} n \equiv 5 \ (8) \\ 5n \equiv 9 \ (3) \end{cases} \iff \underbrace{\begin{cases} n \equiv 5 \ (8) \\ 25n \equiv 2.9 \ (3) \end{cases}}_{\text{inverso multiplicativo}} \iff \begin{cases} n \equiv 5 \ (8) \\ n \equiv 0 \ (3) \end{cases}$$ Bien

Tengo un sistema de misma incógnita cuyos módulos son coprimos entre sí, por lo que puedo usar TCR para resolver

$$\begin{cases} n \equiv 5\ (8) \Longleftrightarrow n = 5 + 8.k \\ n \equiv 0\ (3) \Longleftrightarrow 5 + 8.k \equiv 0 (3) \Longleftrightarrow 2k \equiv 1\ (3) \Longleftrightarrow k \equiv 2\ (3) \end{cases}$$

Luego $k = 2 + 3.q \Rightarrow n = 5 + 8(2 + 3.q) = 21 + 24.q \Longleftrightarrow n \equiv 21\ (24)$

Rta: todos los $n \in \mathbb{N}$ que cumplen ~~que~~ las dos condiciones pedidas son los $n \equiv 21\ (24)$

B

NOTA

Magali Kruel

HOJA N° 3

FECHA

(3)

a- Si P tiene raíces en común con Q, $P = (x-\alpha) \cdot f$ y $Q = (x-\alpha) \cdot g$ si α es esa raíz. Recordemos que $(P:Q)$ ven a ser todos los monomios comunes en su factorización elevados al menor exponente en que aparezcan. Si $(x-\alpha)$ aparece en P y Q, entonces debe de aparecer en $(P:Q)$. Es más, $(P:Q)$ tendrá todas las raíces que compartan P y Q. Entonces busco el polinomio $(P:Q) = s(x)$

$(P:Q) = (Q : r_Q(P))$ por algo. de Euclides. Busco $r_Q(P)$:

$$\begin{array}{l|l} x^7 - 2x^6 - x^5 + x^2 - 2x - 1 & x^7 - 2x^6 + 2x^5 + x^2 - 2x + 2 \\ -\;\underline{x^7 - 2x^6 + 2x^5 + x^2 - 2x + 2} & 1 \end{array}$$

$r_Q(P) = -3x^5 - 3$ => No se puede seguir dividiendo porque tiene grado menor a Q

$(Q : r_Q(P)) = (r_Q(P) : r_{r_Q(P)}(Q))$ por Euclides Busco $r_{r_Q(P)}(Q)$ =

$$\begin{array}{l|l} x^7 - 2x^6 + 2x^5 + x^2 - 2x + 2 & -3x^5 - 3 \\ -\;\underline{x^7 + x^2} & -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \\ -2x^6 + 2x^5 - 2x + 2 & \\ -\;\underline{-2x^6 - 2x} & \\ 2x^5 + 2 & \\ -\;\underline{2x^5 + 2} & \\ 0 & \end{array}$$

B

Encontré que $(P:Q) = (Q : r_Q(P)) = (r_Q(P) ; 0) = \frac{r_Q(P)}{ce(r_Q(P))} = \underline{x^5 + 1}$

Entonces todas las raíces que comparten P y Q son raíces de x^5+1. Raíces de x^5+1 son los $\alpha^5 = -1$, que tiene 5 soluciones distintas en $\mathbb{C}$:

Por igualdad de complejos, $|\alpha^5| = |-1|$ y $\arg(\alpha^5) = \arg(-1)$

- $|\alpha|^5 = |-1|$ => $\underline{|\alpha| = 1}$

NOTA

$\arg(\alpha)\cdot 5 = \pi + 2k\pi \iff \arg(\alpha) = \frac{\pi + 2k\pi}{5}$ con $0 \leq k \leq 4$

$\Rightarrow \alpha_0 = e^{i\frac{\pi}{5}}$, $\alpha_1 = e^{i\frac{3\pi}{5}}$, $\alpha_2 = e^{i\pi} = -1$

$\alpha_3 = e^{i\frac{7\pi}{5}}$ y $\alpha_4 = e^{i\frac{9\pi}{5}}$

Luego $P = (x+1)(x - e^{i\frac{\pi}{5}})(x - e^{i\frac{3\pi}{5}})(x - e^{i\frac{7\pi}{5}})(x - e^{i\frac{9\pi}{5}}) \cdot f$

para hallar todas las raices de P, necesito hayar las raices de f. $f = \dfrac{P}{(x+1)(x - e^{i\frac{\pi}{5}})(x - e^{i\frac{3\pi}{5}})(x - e^{i\frac{7\pi}{5}})(x - e^{i\frac{9\pi}{5}})}$, ~~entonces divido~~

~~P por el producto del polinomio asociado a todas sus raices:~~

$$\cancel{(x+1)(x - e^{i\frac{\pi}{5}})(x - e^{i\frac{9\pi}{5}})(x - e^{i\frac{3\pi}{5}})(x - e^{i\frac{7\pi}{5}}) =}$$

$$\cancel{(x+1)\left(x^2 - x(e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{9\pi}{5}}) + 1\right)\left(x^2 - x(e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{i\frac{7\pi}{5}}) + 1\right) =}$$

$$\cancel{(x+1)\left(x^4 - x^3(e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{i\frac{7\pi}{5}}) + x^2 - x^3(e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{9\pi}{5}}) + x^2(\alpha_0+\alpha_4)(\alpha_1+\alpha_3) - x(e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{9\pi}{5}}) + x^2 - x(e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{i\frac{7\pi}{5}}) + 1\right) =}$$

$$\cancel{(x+1)\Big(x^4 - x^3\underbrace{(e^{i\frac{9\pi}{5}} + e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{7\pi}{5}})}_{1+0i\ \text{(calculadora)}} + x^2\big(2 + \underbrace{(e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}} + e^{i\frac{12\pi}{5}} + e^{i\frac{16\pi}{5}})}_{-1+0i\ \text{(c.a.)}}\big) - x\underbrace{(e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{9\pi}{5}} + e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{i\frac{7\pi}{5}})}_{1+0i\ \text{(c.a.)}}\Big) =}$$

$$\cancel{= x^5 + 1}$$

Recuerdo que $(x+1)(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4) = x^5 + 1$

entonces divido P por x^5+1:

$$
\begin{array}{l|l}
x^7 - 2x^6 - x^5 + x^2 - 2x + 1 & x^5 + 1 \\
\hline
-\ x^7 + x^2 & x^2 - 2x - 1 \\
\quad -2x^6 - x^5 - 2x + 1 & \\
\quad -\ -2x^6 + 0 - 2x & \\
\qquad -x^5 + 1 & \\
\qquad -\ -x^5 - 1 & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow P = (x^5+1)\underbrace{(x^2 - 2x - 1)}_{h}$

Busco raices de h con Bascara $= \dfrac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2 \cdot 1}$ $\begin{cases} r_1 = 1 + \sqrt{2} \\ r_2 = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$

Rta = raices de $P = \left\{-1;\ 1+\sqrt{2};\ 1-\sqrt{2};\ e^{i\frac{\pi}{5}};\ e^{i\frac{3\pi}{5}};\ e^{i\frac{7\pi}{5}};\ e^{i\frac{9\pi}{5}}\right\}$ B

NOTA

Magali Kruel

HOJA Nº 4

FECHA

(5)

b- $\omega \in G_{10}$ ya que las raíces no reales de P son:

$e^{i\frac{\pi}{5}}$, $e^{i\frac{3\pi}{5}}$, $e^{i\frac{7\pi}{5}}$ y $e^{i\frac{9\pi}{5}}$, que elevados a la ~~...~~ décima son cada una: $e^{i\frac{\pi}{5}\cdot 10}=1$, $e^{i\frac{3\pi}{5}\cdot 10}=1$, $e^{i\frac{7\pi}{5}\cdot 10}=1$, $e^{i\frac{9\pi}{5}\cdot 10}=1$ B

Luego: $(\omega^{75}-\omega^{17}+\omega^{12}+\omega^{107}+1)^5 = (\omega^5-\cancel{\omega^7}+\omega^2+\cancel{\omega^7}+1)^5 = (1+\omega^2+\omega^5)^5$

Veamos cuanto es ω^5 para cada raíz:

$(e^{i\frac{\pi}{5}})^5=-1$, $(e^{i\frac{7\pi}{5}})^5=-1$, $(e^{i\frac{3\pi}{5}})^5=-1$ y $(e^{i\frac{9\pi}{5}})^5=-1$ $\omega^5=-1$

$\Rightarrow \omega^5=-1 \ \forall \omega \in$ raíces no reales de P. ~~...~~ por ser raíz de X^5+1

Luego vuelvo a la ecuación:

$(1+\omega^2+\omega^5)^5 = (\cancel{1}+\omega^2-\cancel{1})^5 = \omega^{10} = \omega^{10} = 1$ por $\omega \in G_{10}$

$\Rightarrow$ Rta: para todo $\omega \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ raíz no real de P,

$(\omega^{75}-\omega^{17}+\omega^{12}+\omega^{107}+1)^5 = 1$ B

Magali Kruel

HOJA Nº 5

FECHA

(4) Si $\sqrt{7}$ es raiz, al ser 7 primo y por lo tanto $\sqrt{7}$ irracional, $-\sqrt{7}$ tambien es raiz. Es más, $mul(\sqrt{7},P) = mul(-\sqrt{7},P)$, por lo que si $\sqrt{7}$ es raiz multiple, $-\sqrt{7}$ tambien. Busco la multiplicidad de:

$P' = 6X^5 - 5X^4 - 52X^3 + 42X^2 + 70X - 49$

$P'(\sqrt{7}) = 6 \cdot \sqrt{7}^5 - 5 \cdot \sqrt{7}^4 - 52 \cdot \sqrt{7}^3 + 42 \cdot 7 + 70\sqrt{7} - 49 = 0$

$P'' = 30X^4 - 20X^3 - 156X^2 + 84X + 70$

$P''(\sqrt{7}) \neq 0 \Rightarrow \sqrt{7}$ y $-\sqrt{7}$ tienen multiplicidad 2.

$\Rightarrow P = (X-\sqrt{7})^2 (X+\sqrt{7})^2 \cdot q$ ojo: $\frac{P}{(x^2-7)^2}$ es la función racional

$\hookrightarrow q = \dfrac{P}{(X^2-7)^2} = \dfrac{P}{X^4-14X^2+49} = \dfrac{X^6 - X^5 - 13X^4 + 14X^3 + 35X^2 - 49X + 49}{X^4 - 14X^2 + 49}$

calculo auxiliar:

$$\begin{array}{l|l}
X^6 - X^5 - 13X^4 + 14X^3 + 35X^2 - 49X + 49 & X^4 - 14X^2 + 49 \\
\cline{2-2}
-\underline{X^6 + 0 - 14X^4 + 49X^2} & X^2 - X + 1 \\
\quad -X^5 + X^4 + 14X^3 - 14X^2 & \\
-\underline{\quad -X^5 + 0 + 14X^3 + 0 - 49X} & \\
\qquad X^4 - 14X^2 + 49 & \\
-\underline{\qquad X^4 - 14X^2 + 49} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$\Rightarrow P = (X^4 - 14X^2 + 49)\underbrace{(X^2 - X + 1)}_{g}$

Busco raiz de

$\rightarrow$ ~~factorizo~~ g con fórmula resolvente: $\dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ $\begin{cases} \rightarrow r_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \hookrightarrow r_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

Rta:

en $\mathbb{C}[x]$, $P = (X-\sqrt{7})^2 (X+\sqrt{7})^2 \cdot \left(X - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(X - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)$

que son irreducibles por ser de grado 1

(sigue en siguiente carilla)

NOTA

en $\mathbb{R}[x]$; $P = (x-\sqrt{7})^2(x+\sqrt{7})^2(x^2-x+1)$, que son irreducibles por ser los primeros 2 términos de grado 1 y el último por ser de grado 2 sin raíces irracionales reales.

~~en $\mathbb{Q}[x]$; $P =$ [illegible]~~

en $\mathbb{Q}[x]$, $P = (x^2-7)^2(x^2-x+1)$, que son irreducibles por ser de grado 2 sin raíces racionales.

NOTA