1	2	3	4
B	B	B	B

CALIFICACIÓN
10

TEMA 4

APELLIDO Y NOMBRE: NÚÑEZ JOAQUÍN

LIBRETA: [redacted]

CARRERA: DATOS

COMISIÓN: TURNO 1

Álgebra I - Segundo cuatrimestre de 2024
Segundo Parcial - 29/11/2024

---

1. Hallar todas las soluciones $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ de la ecuación

$$12x + 19y = 6$$

que satisfacen simultáneamente que $x^2 \equiv y^2 \pmod{31}$.

2. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que el resto de la división de $20a^{951}$ por 77 es 8.

3. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$(\sqrt{3} + i)^n (1 - i)^{6-n}$$

es un número real negativo.

4. Hallar todos los $k \in \mathbb{Q}$ para los cuales el polinomio $f = X^6 + kX^3 + 49 \in \mathbb{Q}[X]$ tiene al menos una raíz compleja múltiple. Para cada uno de los valores de k hallados, factorizar f en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

① Primero voy a hallar los $(X,Y) \in \mathbb{Z}^2$ que resuelven la ecuación diofántica $12X + 19Y = 6$

Como $12 \perp 19$ la ecuación tiene solución y es la suma entre la solución de la ecuación homogénea asociada y una solución particular.

- <u>Ecuación</u> <u>homogénea</u> <u>asociada</u>: <u>$12X + 19Y = 0$</u>

$$12X + 19Y = 0 \iff 12X = -19Y \Rightarrow \begin{cases} 12 \mid -19Y \\ 19 \mid 12X \end{cases} \underset{\text{por } 12 \perp 19}{\Rightarrow} \begin{cases} 12 \mid Y \\ 19 \mid X \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} Y = 12k,\ k \in \mathbb{Z} \\ X = 19j,\ j \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Reemplazando en $12X = -19Y$, $\quad 12.19j = -19.12k \iff j = -k$

Entonces, $\begin{cases} Y = 12k \\ X = -19k \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}.$

- <u>solución</u> <u>particular</u> $\quad 12X + 19Y = 6$

La busco con el algoritmo de Euclides.

$$(12:19) = (12:7) = (7:5) = (5:2) = (2:1) = (1:0) = 1$$

$19 = 12 + 7$
$12 = 7 + 5$
$7 = 5 + 2$
$5 = 2.2 + 1$

$\rightarrow$ reemplazo de abajo hacia arriba

$$1 = 5 - 2.2 \underset{2 = 7-5}{=} 5 - 2.(7-5) = 5 - 2.7 + 2.5 = 3.5 - 2.7 =$$

$$\underset{5 = 12-7}{=} 3.(12-7) - 2.7 = 3.12 - 3.7 - 2.7 = 3.12 - 5.7 =$$

$$\underset{7 = 19-12}{=} 3.12 - 5(19-12) = 3.12 - 5.19 + 5.12 = 8.12 - 5.19$$

Entonces, $1 = 8\cdot 12 - 5\cdot 19 \overset{\cdot 6}{\Rightarrow} 6 = 48\cdot 12 + (-30)\cdot 19$

Luego, la sol. particular es $\begin{cases} x = 48 \\ y = -30 \end{cases}$

La sol. general es entonces $\begin{cases} x = -19k + 48 \\ y = 12k - 30 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

<u>Verifico.</u>

$12x + 19y = 12(-19k + 48) + 19(12k - 30) = -19\cdot 12k + 576 + 19\cdot 12k - 570$

$= 576 - 570 = 6$ ✓

• Veo ahora que cumpla que $x^2 \equiv y^2 (31)$.

Reemplazo $x = -19k + 48$, $y = 12k - 30$

$(-19k + 48)^2 \equiv (12k - 30)^2 (31) \Leftrightarrow (-19k)^2 + 2\cdot(-19k)\,48 + 48^2 \equiv (12k)^2 + 2(12k)(-30) + (-30)^2 (31)$

$\Leftrightarrow 361k^2 - 38\cdot 48\cdot k + 48^2 \equiv 144k^2 - 24\cdot 30k + 30^2 (31)$

$\Leftrightarrow 20k^2 - 7\cdot 17k + 17^2 \equiv 20k^2 + 24k + (-1)^2 (31) \Leftrightarrow$

$361 \equiv 20(31)$
$38 \equiv 7(31)$
$48 \equiv 17(31)$
$144 \equiv 20(31)$
$30 \equiv -1(31)$

$\Leftrightarrow 20k^2 - 20k^2 - 119k - 24k \equiv 1 - 17^2 (31)$

$\Leftrightarrow -143k \equiv 1 - 289 (31) \Leftrightarrow -143k \equiv -288 (31) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\underline{12k \equiv 22 (31)}$.

$-143 \equiv 12 (31)$
$-288 \equiv 22 (31)$

Como $12 \perp 31$, existe inverso multiplicativo, es decir, $\exists b \in \mathbb{Z} / 12b \equiv 1 (31)$.

Buscando entre los múltiplos de 12, tenemos que $12\cdot 13 \equiv 156 \equiv 1 (31)$

Luego, $12k \equiv 22\ (31) \overset{13 \perp 31}{\iff} 12.13k \equiv 22.13\ (31) \iff k \equiv 286\ (31)$

$\underset{286 \equiv 7(31)}{\iff} k \equiv 7\ (31) \iff 31 \mid k-7 \iff k = 31y+7,\ y \in \mathbb{Z}.$

~~Entonces~~

Reemplazando en la solución anterior:

$x = -19k + 48 = -19(31y+7) + 48 = -589y - 85$

$Y = 12k - 30 = 12(31y+7) - 30 = 372y + 54$

Entonces los $(X, Y) \in \mathbb{Z}^2$ que cumplen ambas ecuaciones son

$$\begin{cases} X = -589y - 85 \\ Y = 372y + 54 \end{cases},\ y \in \mathbb{Z}.$$

(2) Resto de la división de $20\,a^{951}$ por 77 es 8 $\quad r_{77}(20\,a^{951})=8$

$r_{77}(20\,a^{951})=8 \iff 20\,a^{951}\equiv 8\,(77) \iff 20\,a^{951}\equiv 8\,(7.11) \iff$

$\iff \begin{cases} 20\,a^{951}\equiv 8\,(7) \\ 20\,a^{951}\equiv 8\,(11) \end{cases}$

esto porque $7\perp 11$.

Veo cada condición por separado:

• $20\,a^{951}\equiv 8\,(7) \underset{\substack{20\equiv 6(7)\\ 8\equiv 1(7)}}{\iff} 6\,a^{951}\equiv 1\,(7)$

Notemos que si $\underset{a\equiv 0(7)}{7|a}$ tenemos que $6\,a^{951}\equiv 0\not\equiv 1(7)$

Entonces puedo asumir que $a\not\equiv 0(7)$.

Luego, como $a\not\equiv 0(7)$ y 7 es primo, por PTF, $a^6\equiv 1(7)$

$6\,a^{951}\equiv 1(7) \iff 6\,a^{948}.a^3\equiv 1(7) \iff 6.(a^6)^{158}.a^3\equiv 1(7)$

$\underset{a^6\equiv 1(7)}{\iff} 6\,1^{158}\,a^3\equiv 1(7) \iff 6\,a^3\equiv 1(7) \underset{6\equiv -1(7)}{\iff} -a^3\equiv 1(7)$

$\iff a^3\equiv -1\,(7) \underset{-1\equiv 6(7)}{\iff} \underline{a^3\equiv 6(7)}$

Veo tabla de restos mod 7

$a\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	(7)
$a^2\equiv$	0	1	4	$9\equiv 2$	$16\equiv 2$	$25\equiv 4$	$36\equiv 1$	(7)
$a^3\equiv$	0	1	$8\equiv 1$	$\boxed{6}$	$8\equiv 1$	$20\equiv\boxed{6}$	$\boxed{6}$	(7)

Como la tabla de resto me permite ver todos los casos;

$$a^3 \equiv 6\ (7) \iff a \equiv 3\ (7) \text{ o } a \equiv 5\ (7) \text{ o } a \equiv 6\ (7)$$

Luego,

$$20\,a^{951} \equiv 8\ (7) \iff a \equiv 3\ (7) \text{ o } a \equiv 5\ (7) \text{ o } a \equiv 6\ (7).$$

- $20\,a^{951} \equiv 8\ (11) \underset{20 \equiv 9(11)}{\iff} 9\,a^{951} \equiv 8\ (11)$.

notemos que si $11 | a \iff a \equiv 0\ (11) \Rightarrow 9\,a^{951} \equiv 0 \not\equiv 8\ (11)$

Puedo asumir que $a \not\equiv 0\ (11)$.

Entonces, como $a \not\equiv 0\ (11)$ y 11 es primo, por PTF, $a^{10} \equiv 1\ (11)$.

$$9\,a^{951} \equiv 8\ (11) \iff 9 \cdot a^{950}\, a \equiv 8\ (11) \iff 9\,(a^{10})^{95}\, a \equiv 8\ (11)$$

$$\iff 9 \cdot 1^{95}\, a \equiv 8\ (11) \iff 9\,a \equiv 8\ (11)$$

Como $9 \perp 11$, existe inverso multiplicativo y ojo veo que es 5.

Entonces

$$9\,a \equiv 8\ (11) \underset{5 \perp 11}{\iff} 5 \cdot 9 \cdot a \equiv 8 \cdot 5\ (11) \iff 45\,a \equiv 40\ (11) \underset{\substack{45 \equiv 1(11) \\ 40 \equiv 7(11)}}{\iff} \underline{a \equiv 7\ (11)}$$

Luego, $20\,a^{951} \equiv 8\ (11) \iff a \equiv 7\ (11)$.

En resumen,

$$\begin{cases} 20\,a^{951} \equiv 8\ (7) \\ 20\,a^{951} \equiv 8\ (11) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 3\ (7) \\ a \equiv 7\ (11) \end{cases} \text{ o } \begin{cases} a \equiv 5\ (7) \\ a \equiv 7\ (11) \end{cases} \text{ o } \begin{cases} a \equiv 6\ (7) \\ a \equiv 7\ (11) \end{cases}$$

Como $7 \perp 11$, por TCR, cada sistema tiene solución, y es de la forma $a \equiv x_0 \ (77)$, $0 \leq x_0 \leq 76$.

1) $\begin{cases} a \equiv 3 \ (7) \\ a \equiv 7 \ (11) \iff a = 11k + 7, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$11 \equiv 4 \ (7)$
$7 \equiv 0 \ (7)$

Reemplazando en $a \equiv 3 \ (7)$, $11k + 7 \equiv 3 \ (7) \iff 4k \equiv 3 \ (7)$

$4 \perp 7$, existe inverso. $4k \equiv 3 \ (7) \underset{2 \perp 7}{\iff} 8k \equiv 6 \ (7) \iff k \equiv 6 \ (7)$

$\iff k = 7j + 6, \ j \in \mathbb{Z}$.

Reemplazando en $a = 11k + 7 = 11(7j + 6) + 7 = 77j + 73 \iff \underline{a \equiv 73 \ (77)}$

Verifico, $a \equiv 73 \ (77) \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 73 \ (7) \\ a \equiv 73 \ (11) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a \equiv 3 \ (7) \\ a \equiv 7 \ (11) \end{matrix}$ ✓

2) $\begin{cases} a \equiv 5 \ (7) \\ a \equiv 7 \ (11) \iff a = 11k + 7, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

$11 \equiv 4 \ (7)$
$7 \equiv 0 \ (7)$

Reemplazando en $a \equiv 5 \ (7)$, $11k + 7 \equiv 5 \ (7) \iff 4k \equiv 5 \ (7)$

$4 \perp 7$, existe inverso. $4k \equiv 5 \ (7) \overset{2 \perp 7}{\iff} 8k \equiv 10 \ (7) \iff k \equiv 3 \ (7)$

$\iff k = 7j + 3, \ j \in \mathbb{Z}$.

Reemplazo, $a = 11k + 7 = 11(7j + 3) + 7 = 77j + 40 \iff \underline{a \equiv 40 \ (77)}$

Verifico, $a \equiv 40 \ (77) \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 40 \ (7) \\ a \equiv 40 \ (11) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a \equiv 5 \ (7) \\ a \equiv 7 \ (11) \end{matrix}$ ✓

3) $\begin{cases} a \equiv 6(7) \\ a \equiv 7(11) \iff a = 11k+7, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$11 \equiv 4(7)$

Reemplazando en $a \equiv 6(7)$, $11k+7 \equiv 6(7) \iff 4k \equiv 6(7) \iff$

$\underset{2 \perp 7}{\iff} 8k \equiv 12(7) \underset{12 \equiv 5(7)}{\iff} k \equiv 5(7) \iff k = 7y+5, \ y \in \mathbb{Z}$

Reemplazo en $a = 11k+7 = 11(7y+5)+7 = 77y+62, \ y \in \mathbb{Z} \iff \underline{a \equiv 62(77)}$

Verifico $a \equiv 62(77) \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 62(7) \\ a \equiv 62(11) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a \equiv 6(7) \\ a \equiv 7(11) \end{matrix}$ ✓

Entonces,

$$r_{77}(20a^{a+1}) = 8 \iff \underline{a \equiv 62(77) \ \text{ o } \ a \equiv 73(77) \ \text{ o } \ a \equiv 40(77)}$$

③ $n \in \mathbb{N}$ tal que $z = (\sqrt{3}+i)^n (1-i)^{6-n}$ es un número real negativo

z es real negativo $\iff \arg(z) = \pi$

Calculo $\arg(z)$.

$$\arg(z) = \arg\left((\sqrt{3}+i)^n (1-i)^{6-n}\right)$$

$$\arg(z) = \arg\left((\sqrt{3}+i)^n\right) + \arg\left((1-i)^{6-n}\right) + 2k_1\pi, \quad k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$\arg(z) = \arg(\sqrt{3}+i).n + 2k_2\pi + \arg(1-i)(6-n)\, 2k_3\pi + 2k_1\pi, \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$$

$$\arg(z) = \arg(\sqrt{3}+i).n + \arg(1-i).(6-n) + 2\pi\underbrace{(k_1+k_2+k_3)}_{k \in \mathbb{Z}}$$

$$\arg(z) = \arg(\sqrt{3}+i)\, n + \arg(1-i)(6-n) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Calculo $\arg(\sqrt{3}+i)$ y $\arg(1-i)$

- $\arg(\sqrt{3}+i)$ $\quad \sqrt{3}+i = 2(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\mathrm{sen}(\theta) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} = \arg(\sqrt{3}+i).$$

- $\arg(1-i)$ $\quad 1-i = \sqrt{2}(\cos(\phi) + i\,\mathrm{sen}(\phi)) \Rightarrow \cos(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\mathrm{sen}(\phi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \phi = \frac{7\pi}{4} = \arg(1-i)$$

Entonces, $\arg(z) = \frac{\pi}{6} n + \frac{7\pi}{4}(6-n) + 2k\pi$

Como quiero que $\arg(z) = \pi$,

$$\pi = \frac{\pi}{6} n + \frac{7\pi}{4}(6-n) + 2k\pi \iff 1 = \frac{n}{6} + \frac{7}{4}(6-n) + 2k$$

$$\underset{\cdot 12}{\iff} 12 = \frac{12}{6} n + \frac{12}{4} \cdot 7(6-n) + 24k \iff 12 = 2n + 21(6-n) + 24k$$

$$\iff 12 = 2n + 126 - 21n + 24k \iff 21n - 2n + 12 - 126 = 24k$$

$$\iff 19n - 114 = 24k \iff \underset{24 \mid 19n - 114}{19n \equiv 114\ (24)} \iff \overset{114 \equiv 18 (24)}{19n \equiv 18\ (24)}$$

Como $19 \perp 24$, existe inverso multiplicativo.

Lo busco con el algoritmo de Euclides.

$$19n \equiv 18\ (24) \iff 19n - 18 = 24k$$
$$19n - 24k = 18$$
$$19n + 24y = 18, \quad y = -k \in \mathbb{Z}$$

$$(24:19) = (19:5) = (5:4) = (4:1) = (1:0) = 1$$

$24 = 19 + 5$
$19 = 3 \cdot 5 + 4$
$5 = 4 + 1$

$$1 = 5 - 4 = 5 - (19 - 3 \cdot 5) = -19 + 4 \cdot 5 = -19 + 4 \cdot (24 - 19) =$$
$$= -19 + 4 \cdot 24 - 4 \cdot 19 = 4 \cdot 24 - 5 \cdot 19$$

$$1 = 4 \cdot 24 \boxed{-5} \cdot 19$$

Como $-5 \equiv 19\ (24)$, 19 es el inverso.

Luego, $19n \equiv 18 (24) \overset{19 \perp 24}{\iff} 19 \cdot 19\, n \equiv 18 \cdot 19\ (24) \iff n \equiv 342\ (24)$

$\iff \underline{n \equiv 6 (24)}$

Luego, z es real negativo $\iff \underline{n \equiv 6\ (24)}$

(4) Hallar $K \in \mathbb{Q}$ tal que $F = X^6 + KX^3 + 49 \in \mathbb{Q}[X]$ tenga al menos una raíz compleja múltiple.

Sea $\omega \in \mathbb{C}$, ω es raíz múltiple de $F \iff F(\omega) = 0 \wedge F'(\omega) = 0$

Calculo F'.

$$F' = 6X^5 + 3KX^2$$

• Pido que $F'(\omega) = 0$

$$F'(\omega) = 6\omega^5 + 3K\omega^2 = 0 \iff 2\omega^5 + K\omega^2 = 0 \iff \omega^2(2\omega^3 + K) = 0$$

$$\iff \omega^2 = 0 \text{ o } 2\omega^3 + K = 0 \iff \omega = 0 \text{ o } \omega^3 = \frac{-K}{2}$$

• Pido que $F(\omega = 0) = 0$

$F(0) = 49 = 0$ ABS!, entonces $\omega \neq 0$.

• Pido que $F(\omega)=0$, $\omega^3=-\frac{K}{2}$

$F(\omega)=\omega^6+K\omega^3+49=0 \iff (\omega^3)^2+K\omega^3+49=0 \iff \left(-\frac{K}{2}\right)^2+K\left(-\frac{K}{2}\right)+49=0$

$\iff \frac{K^2}{4}-\frac{K^2}{2}+49=0 \iff -\frac{K^2}{4}=-49 \iff K^2=196$

$\iff K=14$ o $K=-14$

Luego, la K que cumplen que $F(\omega)=0 \wedge F'(\omega)=0$ son $K_1=14$ y $K_2=-14$.

Factorizo:

• $K_1=14$

$F=X^6+14X^3+49$

Por como encontré el K, se que $\omega / \omega^3=-\frac{14}{2}=-7$ es raíz múltiple.

Como hay 3 ws ω que cumplen la ecuación y $gr(F)=6$,

todas las ω tiene multiplicidad 2. porque $f\in\mathbb{Q}[x]$ Esto implica que $(X-\omega)^2 \mid F$.

Busco las ω. $\omega^3=-7 \iff \frac{\omega^3}{-7}=1 \iff \left(\frac{-\omega}{\sqrt[3]{7}}\right)^3=1$

$\iff \frac{-\omega}{\sqrt[3]{7}}\in G_3 \iff \frac{-\omega}{\sqrt[3]{7}}=e^{\frac{2k\pi}{3}i}$, $0\leq k\leq 2$.

Entonces, $k=0 \Rightarrow \frac{-\omega_1}{\sqrt[3]{7}}=1 \Rightarrow \omega_1=-\sqrt[3]{7}$

$k=1 \Rightarrow \frac{-\omega_2}{\sqrt[3]{7}}=e^{\frac{2\pi}{3}i}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \omega_2=\frac{\sqrt[3]{7}}{2}-\frac{\sqrt[3]{7}.\sqrt{3}}{2}i$

$k=2 \Rightarrow \frac{-\omega_3}{\sqrt[3]{7}}=e^{\frac{4\pi}{3}i}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \omega_3=\frac{\sqrt[3]{7}}{2}+\frac{\sqrt[3]{7}.\sqrt{3}}{2}i$

Como F es mónico y $gr(F)=6$ y $(X-\omega_1)^2|F$, $(X-\omega_2)^2|F$ y $(X-\omega_3)^2|F$, no queda otra que $F=(X-\omega_1)^2(X-\omega_2)^2(X-\omega_3)^2$

$\omega_1\neq\omega_2$, $\omega_2\neq\omega_1$, $\omega_3\neq\omega_1$

Entonces, • la factorización de F en $\mathbb{C}[X]$ es:

$$F=\left(X+\sqrt[3]{7}\right)^2\left(X-\left(\frac{\sqrt[3]{7}}{2}-\frac{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt{3}}{2}i\right)\right)^2\left(X-\left(\frac{\sqrt[3]{7}}{2}+\frac{\sqrt[3]{7}\sqrt{3}}{2}i\right)\right)^2$$

que son todos factores de grado 1 mónicos.

• Para ver en $\mathbb{R}[X]$, calculo

$$\left(\frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt[3]{7}\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{4\cdot 7^{2/3}}{4}$$

$$\left(X-\left(\frac{\sqrt[3]{7}}{2}-\frac{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(X-\left(\frac{\sqrt[3]{7}}{2}+\frac{\sqrt[3]{7}\sqrt{3}}{2}i\right)\right)=X^2-\sqrt[3]{7}X+7^{2/3}$$

Luego, la factorización en $\mathbb{R}[X]$ es

$$F=\left(X+\sqrt[3]{7}\right)^2\left(X^2-\sqrt[3]{7}X+7^{2/3}\right)$$

que son los factores de grado 1 en $\mathbb{R}[X]$, y los factores de grado 2 cuyas raíces, como ya vimos, no son reales, con lo que son irreducibles en $\mathbb{R}[X]$.

• En $\mathbb{Q}[X]$ vuelvo a $F=x^6+14x^3+49$

completo cuadrados

$F=x^6+14x^3+49=\underline{(x^3+7)^2}$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$, pues el factor es de grado 3 y no tiene raíces en $\mathbb{Q}$.

• $K_2 = -14$

$$F = X^6 - 14X^3 + 49$$

Conceptualmente es exactamente igual que $K_1 = 14$. La diferencia es que ahora las raíces son las w / $w^3 = \frac{14}{2} = 7$

Busco las w.

$$w^3 = 7 \iff \left(\frac{w}{\sqrt[3]{7}}\right)^3 = 1 \iff \frac{w}{\sqrt[3]{7}} \in G_3 \iff \frac{w}{\sqrt[3]{7}} = e^{\frac{2\pi k}{3} i},\ 0 \le k \le 2$$

• $K=0 \implies \frac{w_1}{\sqrt[3]{7}} = 1 \implies w_1 = \sqrt[3]{7}$

• $K=1 \implies \frac{w_2}{\sqrt[3]{7}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \implies w_2 = \frac{-\sqrt[3]{7}}{2} + \frac{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt{3}}{2} i$

• $K=2 \implies \frac{w_3}{\sqrt[3]{7}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \implies w_3 = -\frac{\sqrt[3]{7}}{2} - \frac{\sqrt[3]{7}\sqrt{3}}{2} i$

Por lo mismo que en el anterior caso, como ya expliqué,

$(X-w_1)^2 \mid F$, $(X-w_2)^2 \mid F$ y $(X-w_3)^2 \mid F$

Luego, $F = (X-w_1)^2 \cdot (X-w_2)^2 (X-w_3)^2$

• Entonces, la factorización en $\mathbb{C}[X]$ es

$$F = \underline{\left(X - \sqrt[3]{7}\right)^2 \left(X - \left(-\frac{\sqrt[3]{7}}{2} + \frac{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt{3}}{2} i\right)\right)^2 \left(X - \left(-\frac{\sqrt[3]{7}}{2} - \frac{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt{3}}{2} i\right)\right)^2}$$

que son todos factores mónicos de grado 1.

• En $\mathbb{R}[X]$, Calculo $\left(X-\left(\frac{\sqrt[3]{7}}{2}-\frac{\sqrt[3]{7}\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(X-\left(-\frac{\sqrt[3]{7}}{2}+\frac{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt{3}}{2}i\right)\right) = X^2+\sqrt[3]{7}+7^{2/3}$

Entonces la factorización en $\mathbb{R}[X]$ es

$$F = \underline{(X-\sqrt[3]{7})^2\left(X^2+\sqrt[3]{7}+7^{2/3}\right)^2}$$

pues aparece un factor de grado 1 dos veces y un factor de grado 2 dos veces cuyas raíces, como ya calculamos, no son reales.

• En $\mathbb{Q}[X]$ vuelvo a $F = X^6-14X^3+49$

Completando cuadrados queda

$$F = \underline{(X^3-7)^2}$$

que es la factorización en $\mathbb{Q}[X]$, pues aparece un factor de grado 3 dos veces, cuyas raíces, como ya calculamos, no pertenecen a $\mathbb{Q}$ con lo que es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$