FINAL DE ÁLGEBRA I
(23-02-24)

N. I.
(nibanez123@gmail.com)

"Era el crepúsculo de la iguana."
Pablo Neruda

Ejercicio 1

Determine todos los posibles valores que puede tomar la expresión

$$(a^{30} + 275 : 9625)$$

si a es un número entero, y para cada uno de ellos encuentre un valor de a que lo realice.

Resolución:

Sea $d = (a^{30} + 275 : 9625)$. Factorizando resulta $9625 = 5^3 \cdot 7 \cdot 11$ y $275 = 5^2 \cdot 11$.

Se tiene que:

- $5 \mid d \iff 5 \mid a^{30} + 275 \iff 5 \mid a^{30} \iff 5 \mid a$.
- $5^2 \mid d \iff 5^2 \mid a^{30} + 275 \iff 5^2 \mid a^{30} \iff 5 \mid a$.
- Para que $5^3 \mid d$ antes debe ser $5^2 \mid d$, y por lo tanto 5 tiene que dividir a. En ese caso, existe $b \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 5b$, y por lo tanto $a^{30} + 275 = 5^2(5^{28}b^{30} + 11)$, que no es divisible por 5^3. Luego, $5^3 \nmid d$ para todo $a \in \mathbb{Z}$.

- $7 \mid d \iff 7 \mid a^{30} + 275 \iff a^{30} + 275 \equiv 0 \pmod{7} \iff a^{30} \equiv 5 \pmod{7}$, pero si $7 \mid a$ resulta $a^{30} \equiv 0 \pmod{7}$, y si $7 \nmid a$ resulta por el PTF $a^{30} \equiv a^{r_6(30)} \equiv a^0 \equiv 1 \pmod{7}$. Luego, $7 \nmid d$ para todo $a \in \mathbb{Z}$.

- $11 \mid d \iff 11 \mid a^{30} + 275 \iff 11 \mid a^{30} \iff 11 \mid a$.

Se concluye así que:

- $d = 275$ cuando $5 \mid a$ y $11 \mid a$ (por ejemplo, $a = 55$).

- $d = 25$ cuando $5 \mid a$ y $11 \nmid a$ (por ejemplo, $a = 5$).

- $d = 11$ cuando $5 \nmid a$ y $11 \mid a$ (por ejemplo, $a = 11$).

- $d = 1$ cuando $5 \nmid a$ y $11 \nmid a$ (por ejemplo, $a = 1$).

■

Ejercicio 2

Encuentre un polinomio mónico f en $\mathbb{Q}[X]$ que satisfaga las siguientes condiciones:

- f tiene una raíz que es una raíz sexta de la unidad que no es real.

- $(f : f') = X^2(X^2 - 4)$.

- $X - \sqrt{3}$ divide a f en $\mathbb{R}[X]$.

Dé además la factorización de f como producto de irreducibles sobre $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

Resolución:

Las raíces sextas de la unidad son las raíces del polinomio $X^6 - 1$, cuya factorización en $\mathbb{Q}[X]$ es $X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)$. Luego, para que se cumpla la primera condición, debe ser $X^2 + X + 1 \mid f$ o $X^2 - X + 1 \mid f$.

Para que valga la segunda condición debe ser $X^3 \mid f$ y $(X^2 - 4)^2 \mid f$, y por lo tanto, $X^3(X^2 - 4)^2 \mid f$.

Para que valga la tercera condición, $X^2 - 3 \mid f$.

Luego, podemos tomar $f = (X^2 + X + 1)X^3(X^2 - 4)^2(X^2 - 3)$.

Por otro lado, las factorizaciones de f como producto de irreducibles sobre $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ son, respectivamente,

$$f = (X^2 + X + 1)X^3(X - 2)^2(X + 2)^2(X^2 - 3),$$
$$f = (X^2 + X + 1)X^3(X - 2)^2(X + 2)^2(X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3}), \text{ y}$$
$$f = (X - \alpha)(X - \bar{\alpha})X^3(X - 2)^2(X + 2)^2(X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3}),$$

donde $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

■

Ejercicio 3

Sea $V = \{1, 2, ..., 100\}$. Consideremos la relación $\Re$ sobre el conjunto $W := V \times V$ tal que siempre que (a, b) y (c, d) son elementos de W vale que

$$(a, b) \ \Re \ (c, d) \iff a + d = b + c.$$

a) Pruebe que $\Re$ es una relación de equivalencia.

b) Describa la clase de equivalencia del elemento $(7, 3)$ y calcule su cardinal.

Resolución:

a) • Reflexividad: Sea $(a, b) \in W$. Luego,

$$(a, b) \ \Re \ (a, b) \ \Leftrightarrow \ a + b = b + a,$$

que vale.

• Simetría: Sean $(a, b), (c, d) \in W$ tales que $(a, b) \ \Re \ (c, d)$. Luego,

$$(c, d) \ \Re \ (a, b) \ \Leftrightarrow \ c + b = d + a \ \Leftrightarrow \ a + d = b + c,$$

que vale pues $(a, b) \ \Re \ (c, d)$.

- Transitividad: Sean $(a, b), (c, d), (e, f) \in W$ tales que $(a, b) \Re (c, d)$ y $(c, d) \Re (e, f)$. Luego,

$$(a, b) \Re (e, f) \;\Leftrightarrow\; a + f = b + e \;\Leftrightarrow\; a + d + c + f = b + c + d + e,$$

que vale pues $a + d = b + c$ y $c + f = d + e$.

Se concluye así que $\Re$ es una relación de equivalencia.

b) Tenemos que

$$(a, b) \Re (7, 3) \;\Leftrightarrow\; a + 3 = b + 7 \;\Leftrightarrow\; a - b = 4.$$

Luego, como el conjunto de soluciones de la ecuación diofántica $a-b = 4$ es

$$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a = 4 + k,\; b = k,\; k \in \mathbb{Z}\},$$

la clase de equivalencia de $(7, 3)$ es el conjunto de todos los pares $(4 + k, k)$ con $k \in \mathbb{Z}$ tales que $4 + k, k \in V$.

Resulta $k \in V \Leftrightarrow 1 \leq k \leq 100$, y $4 + k \in V \Leftrightarrow 1 \leq 4 + k \leq 100 \Leftrightarrow -3 \leq k \leq 96$, y por lo tanto debe ser $1 \leq k \leq 96$. Entonces, la clase de equivalencia de $(7, 3)$ es

$$\{(4 + k, k) : 1 \leq k \leq 96,\; k \in \mathbb{N}\}$$

(que tiene 96 elementos).

■

Ejercicio 4

Sea $(F_n)_{n\geq 0}$ la sucesión de los números de Fibonacci, de manera que

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \;\text{ y }\; F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \;\text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Muestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ resulta $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Resolución:

Usamos inducción. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, la afirmación dada por

$$P(n): \quad F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Veamos que vale $P(n)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 1$ resulta

$$F_{1+1}F_{1-1} - F_1^2 = F_2F_0 - F_1^2 = 1 \cdot 0 - 1^2 = -1 = (-1)^1.$$

Si $n = 2$ resulta

$$F_{2+1}F_{2-1} - F_2^2 = F_3F_1 - F_2^2 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1 = (-1)^2.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos verdaderas $P(n)$ y $P(n+1)$ y veamos que lo es $P(n+2)$. La afirmación $P(n+2)$ es verdadera si y sólo si $F_{n+3}F_{n+1} - F_{n+2}^2 = (-1)^{n+2}$.

Por ser $P(n)$ verdadera resulta

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n,$$

y por serlo $P(n+1)$,

$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}.$$

Restando las últimas dos igualdades obtenemos

$$\begin{aligned}
(F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2) - (F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2) &= (-1)^n - (-1)^{n+1} \\
F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 - F_{n+2}F_n + F_{n+1}^2 &= (-1)^n(1 - (-1)) \\
F_{n+1}^2 - F_n^2 &= 2(-1)^n + F_{n+2}F_n - F_{n+1}F_{n-1}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
F_{n+3}F_{n+1} - F_{n+2}^2 &= (F_{n+2} + F_{n+1})F_{n+1} - (F_{n+1} + F_n)^2 \\
&= F_{n+2}F_{n+1} + F_{n+1}^2 - F_{n+1}^2 - 2F_{n+1}F_n - F_n^2 \\
&= (F_{n+1} + F_n)F_{n+1} - 2F_{n+1}F_n - F_n^2 \\
&= F_{n+1}^2 + F_{n+1}F_n - 2F_{n+1}F_n - F_n^2 \\
&= F_{n+1}^2 - F_n^2 - F_{n+1}F_n \\
&= 2(-1)^n + F_{n+2}F_n - F_{n+1}F_{n-1} - F_{n+1}F_n \\
&= 2(-1)^n + (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}F_{n-1} - F_{n+1}F_n \\
&= 2(-1)^n + F_{n+1}F_n + F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} - F_{n+1}F_n \\
&= 2(-1)^n + F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} \\
&= 2(-1)^n - (F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2) \\
&= 2(-1)^n - (-1)^n \\
&= (-1)^{n+2}.
\end{aligned}$$

Probados los casos base y el paso inductivo, se concluye que $P(n)$ es verdadera $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

$\blacksquare$

Ejercicio 5

Sea $X = \{0, 1, ..., 29\}$. Determine el cardinal del conjunto $\mathcal{F}$ de todas las funciones inyectivas $f : X \to X$ que para cada $x \in X$ satisfacen las condiciones

$$f(x) \equiv x \pmod{5} \quad \text{y} \quad f(x) \equiv x \pmod{2}.$$

Resolución:

Sea $f \in \mathcal{F}$. Definamos en el conjunto X una relación de equivalencia $\Re$ tal que, para cada $x \in X$, la clase de x, denotada por $[x]$, esté formada por todos los posibles valores de $f(x)$. Luego, si $x, y \in X$, debe ser

$$x \,\Re\, y \iff x \equiv y \pmod{10}$$

(notar que $x \equiv y \pmod 5$ y $x \equiv y \pmod 2$ si y sólo si $x \equiv y \pmod{10}$).

Entonces, para cada $x \in \{0, 1, ..., 9\}$, resulta $[x] = \{x, x+10, x+20\}$, y por lo tanto hay 3 posibilidades para $f(x)$ (pues $f(x) \in [x]$), hay 2 posibilidades para $f(x+10)$ (pues $f(x+10) \in [x] - \{f(x)\}$) y hay una sola para $f(x+20)$ (pues $f(x+20) \in [x] - \{f(x), f(x+10)\}$).

Se concluye así que $\#(\mathcal{F}) = (3 \cdot 2 \cdot 1)^{10} = 6^{10}$.

$\blacksquare$