Lógica y Computabilidad
Segundo Cuatrimestre de 2023
Segundo Parcial

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

▷ Resolver cada ejercicio en **una hoja separada**. ▷ Poner nombre y LU en todas las hojas. ▷ Se debe **justificar todas las respuestas**. ▷ El examen es **a libro abierto** y puede usarse lo demostrado en clase o en ejercicios de las guías con **referencias claras y precisas** de dónde vienen. ▷ El examen se aprueba con al menos 2 ejercicios completamente bien resueltos y se promociona con al menos 3 en esa condición.	Nombre y Apellido:	Nota:			
	Libreta Universitaria:	Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4

Ejercicio 1. Sea Γ un conjunto de fórmulas de la lógica proposicional y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\Gamma_n = \{\varphi \mid \text{ existe una demostración de tamaño } \leq n \text{ de } \varphi \text{ por } \Gamma\}$.

i. Demuestre que $\text{con}(\Gamma) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$.

ii. Demuestre que Γ es consistente si y solo si Γ_n es consistente para todo n.

Ejercicio 2. Dada una interpretación $\mathcal{I}$ con universo A, decimos que una función $f : A \to A$ es *expresable* si $\text{graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ es expresable. Demuestre que la función $\text{suc} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es expresable en el lenguaje con igualdad $\mathcal{L} = \{\leq, =\}$, con $\leq$ interpretándose de la manera usual.

Ejercicio 3. Considerar $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, f un símbolo de función binario, y ℓ un símbolo de función unario. Sea SQ_{Str} la axiomatización que extiende a SQ con las siguientes fórmulas:

A1	$\forall x, \forall y, \forall z, f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$
A2	$\forall x \forall y, \ell(f(x, y)) = \ell(f(y, x))$
A3i	$\exists x_1 \ldots \exists x_i \, (todosDistintos(x_1, \ldots, x_i))$ para $i \geq 2$

Demostrar que SQ_{Str} es correcta pero no es completa con respecto a la estructura $\langle \{0,1\}^+, \bullet, |\,| \rangle$, donde $\{0,1\}^+$ denota el conjunto de palabras de longitud de positiva constituidas por ceros y unos, $\bullet$ denota la concatenación de palabras, y, si ω es una palabra, $|\omega|$ denota la longitud de esta palabra escrita en binario, sin poner ceros innecesarios a la izquierda. Por ejemplo, $01110 \bullet 111 = 01110111$. También tenemos $|0110| = 100$, ya que la longitud de 0110 es 4, que en binario se escribe como 100 (notar que $|0110|$ NO es 0100).

Ejercicio 4. Dada una función unaria f, decimos que es *apenas no inyectiva* si el conjunto $\{(x, y) \mid x \neq y \wedge f(x) = f(y)\}$ es finito.
Demostrar que dado un lenguaje con igualdad y un símbolo de función unario, no es expresable en primer orden la proposición "f es una función apenas no inyectiva".