1) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad K = \min \{ h \in \mathbb{N} \,/\, Nu(A^h) = Nu(A^{h+1}) \}$ H:1

a) Si $Nu(A) \cap Im(A^j) \neq \{0\}$ con $j \in \mathbb{N}$ qvq $Nu(A^j) \subsetneq Nu(A^{j+1})$

Si $Nu(A) \cap Im(A^j) \neq \{0\}$ es porque existe un $\underset{\neq 0}{x} \in \mathbb{R}^n$ tq

$Ax = 0 \wedge \left[\exists \underset{\neq 0}{z} \in \mathbb{R}^n \,/\, A^j z = x \right]$ ①

$A^j z = x$ multiplico por A ambos lados: $A^{j+1} z = 0 \Leftrightarrow z \in Nu(A^{j+1})$

quisiera ver que $z \notin Nu(A^j)$. Eso ya lo tengo por ①. Además notar que $Nu(A^j) \subseteq Nu(A^{j+1})$. Entonces como $z \in Nu(A^{j+1})$ pero no al $Nu(A^j)$ vale que $Nu(A^j) \subsetneq Nu(A^{j+1})$

Para que valiera eso j debería ser el 'K' planteado en el enunciado y como K es el mínimo $\mathbb{N}$ que cumple que $Nu(A^K) = Nu(A^{K+1})$ $j < K$. ~~Si~~ $j \geq K$,

b) $\{v_1, \dots, v_m\}$ es una base de $Im(A^K)$ con $m = rg(A^K) \overset{TEO}{=} \dim(Im(A^K))$

qvq $\{A^j v_1, \dots, A^j v_m\}$ es base de $Im(A^K)$ para cualquier $j \in \mathbb{N}$

Sé que $\forall x \in Im(A^K)$ $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$ algún $\alpha_i \neq 0$

$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^n \,/\, A^K y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$ ahora bien, multiplico por A^j de ambos lados

Llego a que $A^j A^K y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A^j v_i$. Como lo quiero probar para todo $j \in \mathbb{N}$ hago inducción en j.

Caso base: $j=1 \rightarrow$ qvq $\{A v_1, \dots, A v_m\}$ es base de $Im(A^K)$

$\forall x \in Im(A^K)$ $\exists y \,/\, x = A^K y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i \xrightarrow{A} A^{K+1} y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A v_i$ y sé que $Im(A^{j+1}) \subseteq Im(A^j)$ $\forall j$

entonces vale el caso base porque expreso a cualquier elemento en la imagen de A^K como el de $A v_1, \dots, A v_m$. $\Rightarrow Im(A^{K+1}) = Im(A^K)$

$Nu(A^K) = Nu(A^{K+1}) \xrightarrow[\dim]{TEO} rg(A^K) = rg(A^{K+1})$

HI: Supongo que vale para j que $\{A^j v_1, \dots, A^j v_m\}$ es base de $\mathrm{Im}(A^k)$

qvq $\{A^{j+1} v_1, \dots, A^{j+1} v_m\}$ es base de $\mathrm{Im}(A^k)$

Veamos: $x \in \mathrm{Im}(A^k) \ / \ x = \sum_{i=1}^{m} v_i \alpha_i$

$\Rightarrow \forall x, \exists y \ / \ A^k y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$ ~~multiplico todo por A^{j+1}~~

$\cancel{A^{j+1} A^k y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A^{j+1} v_i \Rightarrow A \cdot A^j A^k y = \sum_{i=1}^{m} A \alpha_i A^j v_i}$

Como sé que $\mathrm{Nu}(A^j) \subseteq \mathrm{Nu}(A^{j+1})$ y $\mathrm{Im}(A^{j+1}) \subseteq \mathrm{Im}(A^j)$

y sé que en este caso $\mathrm{Nu}(A^k) = \mathrm{Nu}(A^{k+1})$, entonces $\mathrm{Im}(A^k) = \mathrm{Im}(A^{k+1})$

Por hipótesis inductiva sé que a cualquier vector de la imagen de A^k lo puedo escribir como c.l de $\{A^j v_1, \dots, A^j v_m\}$

Entonces, $A^k y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A^j v_i$, si multiplico por A a ambos lados

llego a que $A^{k+1} y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A^{j+1} v_i$. Como $k = \min\{h \in \mathbb{N} \ / \ \overset{\mathrm{Im}}{\mathrm{Nu}}(A^h) = \overset{\mathrm{Im}}{\mathrm{Nu}}(A^{h+1})\}$

Sé que el conjunto imagen de A^k es el mismo que el de A^{k+1}. Entonces si podría expresar un elemento de la imagen de A^k como una c.l de una base debería poder expresar a ese mismo elemento como una c.l de "otra" base de A^{k+1}. La dimensión de $\{A^{j+1} v_1, \dots, A^{j+1} v_m\}$ es m así que solamente tengo que ver que efectivamente son l.i: Supongo que no lo son, entonces $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i A^{j+1} v_i = 0$ con algún $\alpha_i \neq 0 \Leftrightarrow A\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i A^j v_i\right) = 0$

como $A \neq 0$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A^j v_i = 0$ Pero esto es lo mismo que decir que $\{A^j v_1, \dots, A^j v_m\}$ no es una base. Lo cual es abs porque lo era por HI. Por lo tanto resulta que $\{A^{j+1} v_1, \dots, A^{j+1} v_m\}$ es l.i. Entonces es la base que buscaba. Y como probé que $P(j) \Rightarrow P(j+1)$ lo probé para todo j

c) qvq $Nu(A^k) \cap Im(A^k) = \{0\}$

Supongo que no vale. Entonces $\exists\, x \neq 0 \,/\, A^k x = 0$

$A^k y = x$ (para algún $y \in \mathbb{R}^n$)

$\Rightarrow$ Si $A^k y = x \xRightarrow{\cdot A} A^{k+1} y = 0 \Leftrightarrow y \in Nu(A^{k+1})$ pero $y \notin Nu(A^k)$ porque $A^k y = x$ con $x \neq 0$. Y recuerdo que valía por enunciado que $Nu(A^k) = Nu(A^{k+1})$ entonces llegué a un ABS, por suponer que $Nu(A^k) \cap Im(A^k) \neq \{0\}$

El ABS es que encontré un $y \in Nu(A^{k+1})$ pero no a $Nu(A^k)$, entonces no valdría $Nu(A^k) = Nu(A^{k+1})$. Por teorema de la dim sé que $Nu(A^k) + Im(A^k) = n$

como $\cap = \{0\}$ están en suma directa $\Rightarrow Nu(A^k) \oplus Im(A^k) = n = \mathbb{R}^n$

d) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -9 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $Nu(A) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ -9 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} -3x_1 + x_2 + \overset{0}{x_3} = 0 \\ x_3 = 0 \\ -2x_3 = 0 \end{array}$

$x_2 = 3x_1$

$\Rightarrow Nu(A) = \langle (1 \;\; 3 \;\; 0) \rangle$ ✗

CALCULADORA

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $Nu(A^2) = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$

$\parallel$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ $Nu(A^3) = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$

$\Rightarrow k = 2$ ✓ $Nu(A^2) = \langle (1\;0\;0), (0\;1\;0) \rangle$

$Im(A^2) \rightarrow A^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} -x_3 = y_1 \\ -5x_3 = y_2 \\ 4x_3 = y_3 \end{array}$ $x_3(-1, -5, 4)$

$Im(A^2) = \langle (-1 \;\; -5 \;\; 4) \rangle$ ✓

2) $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times k}$, $C\in\mathbb{R}^{k\times n}$, $D\in\mathbb{R}^{k\times k}$ y $M=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$ H:3

a) qvq A inversible, A y $D-CA^{-1}B$ tienen LU $\Rightarrow$ M tiene LU

Me gustaría ver si puedo construirme una fact. LU para M.

Propongo $L_M=\begin{pmatrix}I&0\\CA^{-1}&I\end{pmatrix}$ y $U_M=\begin{pmatrix}A&B\\0&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$ $\exists A^{-1}$

Veo q funciona: $L_M U_M = M \Rightarrow \begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$ ✓

Ahora bien, la U_M no sería triangular superior. Propongo lo siguiente: $A=L_AU_A$ y $D-CA^{-1}B=\tilde{L}\tilde{U}$. Entonces si descompongo esta U_M consigo el caso: Sean $A=L_A\,U_A$ y $D-CA^{-1}B=\tilde{L}\tilde{U}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}L_A&0\\x&\tilde{L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_A&y\\0&\tilde{U}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&L_Ay\\xU_A&xy+D-CA^{-1}B\end{pmatrix} \qquad A^{-1}=U_A^{-1}L_A^{-1}$$ ✓

$x=C\cdot U_A^{-1}$

$CU_A^{-1}y+D-CA^{-1}B=D \iff C\cdot U_A^{-1}y=CU_A^{-1}L_A^{-1}B \iff y=L_A^{-1}B$. Notar que L_A y $\tilde{L}$ tienen 1s en la diagonal por def. $\tilde{U}$ y U_A son TS por def.

$\Rightarrow$ La fact. LU de M sería: $M=\begin{pmatrix}L_A&0\\C\cdot U_A^{-1}&\tilde{L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_A&L_A^{-1}B\\0&\tilde{U}\end{pmatrix}$ ✓

Veamos si vale $\Leftarrow$): Si M tiene fact. LU supongo $M=L_M\cdot U_M$

$$\Rightarrow M=\begin{pmatrix}l_{11}&0\\l_{21}&l_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{11}&u_{12}\\0&u_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_{11}\cdot u_{11}&l_{11}\cdot u_{12}\\l_{21}\cdot u_{11}&l_{21}\cdot u_{12}+l_{22}\cdot u_{22}\end{pmatrix}$$

qvq: $l_{11}\cdot u_{11}=A$ con l_{11} T.inf por ser parte de la LU de M y u_{11} T.S por lo mismo $\Rightarrow$ Es una fact LU de A ✓

Además que se puede suponer A inv. como dato $\Rightarrow \exists\, u_{11}^{-1}$ y l_{11}^{-1} ✓

$l_{21}\cdot u_{11}=C \Rightarrow l_{21}=C\cdot u_{11}^{-1}$

$l_{11}\cdot u_{12}=B \Rightarrow u_{12}=l_{11}^{-1}\cdot B$

$l_{21}\cdot u_{12}+l_{22}u_{22}=D \Rightarrow C\cdot\overbrace{u_{11}^{-1}\cdot l_{11}^{-1}}^{A^{-1}}B+l_{22}u_{22}=D \iff$

$D-C\cdot A^{-1}B=l_{22}u_{22} \Rightarrow$ Es una fact. LU por lo de antes.

$\therefore$ Vale la vuelta.

b) $\det(M) = \det(L_m U_m) = \det(U_m)$

$U_m = \begin{pmatrix} U_A & L_A^{-1}B \\ 0 & \tilde{U} \end{pmatrix}$ como U_m es Ts su determinante es el producto de su diagonal. Su diagonal está formada por U_A y $\tilde{U}$

tiene 1s en la diag. y es (inv.) [illegible]

Sé que $U_A = L_A^{-1} A$ y $\tilde{U} = \tilde{L}^{-1} (D - CA^{-1}B)$

el producto de la diagonal de U_A es $\det(U_A) = \det(L_A^{-1}A) = \underbrace{\det(L_A^{-1})}_{=1} \det(A)$ = 1 porque la L_A viene de hacer EG [illegible]

— " — " — " — $\tilde{U}$ es $\det(\tilde{U}) =$ su inversa también tendrá 1s en la diagonal

$= \det(D - CA^{-1}B) \cdot \det(\tilde{L}^{-1})$

1 por lo visto antes

$\Rightarrow$ El $\det(M)$ queda expresado como $\det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B)$

c) pvq $\|M\|_\infty = \max(\|(A,B)\|_\infty, \|(C,D)\|_\infty)$

Recuerdo la propiedad de que la $\|\cdot\|_\infty$ de una matriz $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es $\max_i \sum_{j=1}^{n} t_{ij}$

veo que $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & \cdots & & b_{2k} \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} & b_{n1} & \cdots & & b_{nk} \\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1k} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \\ c_{k1} & \cdots & & c_{kn} & d_{k1} & \cdots & & d_{kk} \end{pmatrix}$ (A,B) (C,D)

Entonces veo que $\|(A,B)\|_\infty$ ~~[illegible]~~ es buscar la suma máxima en esa submatriz de M ~~[illegible]~~. Con lo cual para buscar $\|M\|_\infty$ puedo "dividir" la búsqueda mirando primero $\|(A,B)\|_\infty$ y luego $\|(C,D)\|_\infty$ y ~~[illegible]~~ quedarme con el máximo entre ambos.

H: 4

Ahora qvq $\max(\|A\|_\infty + \|B\|_\infty, \|C\|_\infty + \|D\|_\infty) \geq \max(\|(A,B)\|_\infty, \|(C,D)\|_\infty)$

Recuerdo la desigualdad triangular $\|W+T\| \leq \|W\| + \|T\|$

Entonces noto que $\|A+B\|_\infty \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$ (lo mismo para C y D)

Además, calcular $\|A+B\|_\infty$ es lo mismo que hacerlo para $\|(A,B)\|_\infty$

pues aunque las dimensiones son distintas para sumar ambos el cálculo es el mismo: Estoy sumando cada elemento de la fila i de A con cada elem de la fila i de B. ~~Podría suponer que a B le agrego $n-k$ columnas de 0s para que no me cambie el resultado.~~ Análogo para $\|(C,D)\|_\infty$

$\Rightarrow \|(A,B)\|_\infty = \max\limits_{\substack{i \\ 1 \leq i \leq n}} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| + \sum_{j=1}^{k} |b_{ij}| \right)$ y por la desigualdad triangular

sé que $\max\limits_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| + \sum_{j=1}^{k} |b_{ij}| \right) \leq \max\limits_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) + \max\limits_i \left(\sum_{j=1}^{k} |b_{ij}| \right)$ [illegible]

[illegible]

Intuitivamente puedo pensar que tomar la mejor suma de las filas de A y sumarle la mejor suma de las filas de B es mejor que tomar la mejor suma en conjunto.

~~[illegible]~~ Si $\max(\|A\|_\infty + \|B\|_\infty, \|C\|_\infty + \|D\|_\infty) = \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$ sé que es $\geq \|C\|_\infty + \|D\|_\infty$

y $\geq \|(A,B)\|_\infty \geq \|(C,D)\|_\infty$. Es análogo si el máximo es el otro

$\|A+B\|_\infty \neq \|(A,B)\|_\infty$, [illegible] Σ [illegible] mismas dimensiones

[illegible]

[illegible]

[illegible]

([illegible] > 0 [illegible])

[illegible]

3) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ SdP

a) Sé que $x^T A x > 0 \ \forall x \overset{\neq 0}{\in} \mathbb{R}^n$. Recuerdo que dado e_i el vector canónico i $(1\le i\le n)$, $(A)_{ii} = e_i^T A e_i = a_{ii}$. Sé que $x^TAx>0\ \forall x\in\mathbb{R}^n$ así que en particular tomo $x = e_i \Rightarrow e_i^T A e_i = \boxed{a_{ii} > 0}$ por ser A SdP

Si A es singular es porque su Núcleo no es $\{0\}$. Es decir $\exists x\neq 0,\ x\in\mathbb{R}^n / Ax=0$. Supongamos que A es SdP y no inversible, tomemos ese $x / Ax = 0$. Pero si $Ax=0 \Rightarrow x^TAx = 0$ Pero A era SdP $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $(x^TAx>0)$. Entonces es ABS. Vino de suponer que existía un $x\neq 0$ tal que $Ax=0$ (i.e A no inversible)

Por lo tanto A es inversible

No vale la vuelta, contraej: $A = \begin{pmatrix}2&1\\-8&1\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}2>0\\1>0\end{matrix}$ $\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix}$ es li con $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ A inv.

Si $x = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \longrightarrow x^TA = (1\ \ 1)\begin{pmatrix}2&1\\-8&1\end{pmatrix} = (-6\ \ 2) \Rightarrow x^TAx = (-6\ \ 2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = -4 < 0$

c) qvq $|a_{ij}|^2 \le a_{ii}\cdot a_{jj}\ \forall 1\le i,j\le n$. Deducir que el elemento de módulo máximo está en la diagonal.

Sé que $x^TAx>0 \ \forall x\in\mathbb{R}^n$, en particular para e_i, e_j los vectores canónicos

Supongamos un $z\in\mathbb{R}^n / z = \alpha e_i + \beta e_j$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ sé que $z^TAz>0$

$\Leftrightarrow (\alpha e_i+\beta e_j)^T A(\alpha e_i+\beta e_j)>0 \Leftrightarrow (\alpha e_i^T A + \beta e_j^T A)(\alpha e_i + \beta e_j) > 0 \Leftrightarrow$

A sim $\Rightarrow a_{ij} = a_{ji}$

$\alpha^2 e_i^TAe_i + \beta^2 e_j^TAe_j + 2\alpha\beta e_i^TAe_j > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 a_{ii} + \beta^2 a_{jj} + 2\alpha\beta a_{ij} > 0$

Como vale para cualquier $x\in\mathbb{R}^n$, puedo tomar α, β cualesquiera y sigue valiendo

En particular tomo $\alpha = -a_{ij}$ y $\beta = a_{ii} > 0$ (por a))

$\Rightarrow a_{ij}^2 a_{ii} + a_{ii}^2 a_{jj} - 2a_{ij}^2 a_{ii} > 0 \Leftrightarrow \underbrace{a_{ii}}_{>0}(a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2) > 0$

$a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2 \ge 0 \Leftrightarrow a_{ii}a_{jj} \ge |a_{ij}|^2$

como $\underbrace{a_{ii} \text{ y } a_{jj} > 0}_{a_{ii}a_{jj}>0}$ el módulo no cambia nada

b) Todas las submatrices de A son SdP

~~Supongamos que alguna submatriz principal de A no sea SdP~~

Ver la simetría es trivial porque A es simétrica. Veamos que es dP. Sea A_K una submatriz principal de A de $K \times K$

$x_K^T A_K x_K \overset{?}{>} 0 \quad \forall x_K \neq 0 \in \mathbb{R}^K$. Sea $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_K \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ sé que $\bar{x}^T A \bar{x} > 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{x}_K^T & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c} A_K & \\ \hline & \end{array}\right) \begin{pmatrix} \bar{x}_K \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_K^T & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K \bar{x}_K \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} = \bar{x}_K^T A_K \bar{x}_K$$

no me importa

y eso era > 0. $\therefore$ la submatriz A_K de A es dP y como era sim. es SdP.

Vale para todo K, entonces queda probado

H: 6

4) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) ii) Una matriz de Givens G tiene la forma $G = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{Sen}(\theta) \\ -\operatorname{Sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$
Donde θ es el angulo de rotación del vector
Dados un $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Busco G tq $G\tilde{x} = \tilde{y}$. En este caso
$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\|\tilde{x}\|_2 = 5$ propongo $G' = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$ como $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

completo con la Id. $G = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

calculo $G \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = R$ triang. superior

Como G es ortogonal por def., $G^{-1} = G^T \Rightarrow A = G^T R = QR$

$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

i) La matriz de householder $H = I - 2u \cdot u^T$ Donde $u = \dfrac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2}$

En este caso $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u = \tilde{x} - \tilde{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2 = \sqrt{20}$ $2uu^T = \frac{2}{20}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{20}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 8 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$I - 2uu^T = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow H \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = R$

$Q = H^T = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ACL: No tengo más tiempo pero chequee con la calculadora que $A = QR$ en ambos casos Confiar en la teoría... da bien.

b) Vi que utilizando matrices de Householder la R no quedó con elementos positivos en la diagonal. Usando Givens tampoco.
Voy a modificar la R de Householder al multiplicarla por

$$I' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow I'HA = I'R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R'$$

Notar que I' es ortogonal porque es la Id cambiada de signo al final

$$Q' = (I')^T \cdot H^T = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \overset{?}{=} Q'R' \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{ortogonal}} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Tri. Sup.}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

No tengo más tiempo para la otra parte. Debería ver si existe una matriz de la pinta $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{Sen}(\theta) & 0 \\ -\operatorname{Sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (GIVENS)

ó algún $u = \dfrac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2}$ tal que $H = I - 2uu^T = Q'$ para ver si es una reflexión de Householder...

No era ninguna de las dos