8 Hojas

1	2	3	4
B	B	B	B

Calificación
10

Tema 1

Apellido y Nombre: Terán Jowin Alejandro   Libreta: 1096/24

Carrera: Datos   Comisión: Turno 3

Álgebra I - Segundo cuatrimestre de 2024

Primer Parcial - 15/10/2024

---

1. Sea X el conjunto de todas las funciones de $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ en $\{0,1\}$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en X como:

$$f \,\mathcal{R}\, g \iff f(1)+g(3)=f(3)+g(1).$$

   a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. ¿Es $\mathcal{R}$ antisimétrica?

   b) Calcular la cantidad de clases de equivalencia de $\mathcal{R}$ y exhibir un representante de cada una de ellas.

2. Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n}(n-i)2^{i-1} = 2^n - n - 1.$$

3. ¿Cuántas funciones $f\colon \{1,2,\ldots,10\} \to \{1,2,\ldots,12\}$ hay que **no** sean inyectivas y que al mismo tiempo cumplan que $f(1) < f(3) < f(5)$?

4. Sean $a,b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a:b)=1$. Calcular los posibles valores de $(a^2+3b^2 : 2a^2+11b^2)$ y dar un ejemplo para cada uno de ellos.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.

Justifique todas sus respuestas.

Ej (1) Sea $f: \{1;2;3;4;5;6;7\} \to \{0;1\}$

a) R es reflexiva $\Leftrightarrow \forall f \in X (f R f)$

$f R f \Leftrightarrow f(1) + f(3) = f(3) + f(1)$

$= f(1) + f(3)$ verdadero trivialmente ✓

Es Reflexiva ✓

R es simetrica $\Leftrightarrow \forall f, g \in X (f R g \Rightarrow g R f)$

$f R g$

$f(1) + g(3) = f(3) + g(1) \Rightarrow g(1) + f(3) = g(3) + f(1)$

por simetria de la igualdad esto se cumple

Es simetrica ✓

R es transitiva $\Leftrightarrow \forall f; g; h ((f R g \wedge g R h) \Rightarrow f R h)$

Es decir

$(f(1) + g(3) = f(3) + g(1) \wedge g(1) + h(3) = g(3) + h(1)) \Rightarrow f(1) + h(3) = f(3) + h(1)$

Sabemos que:

- $f(1) + g(3) = f(3) + g(1) \Leftrightarrow f(1) - f(3) = g(1) - g(3)$
- $g(1) + h(3) = g(3) + h(1) \Leftrightarrow g(1) - g(3) = h(1) - h(3)$.

Entonces si $f(1) - f(3) = g(1) - g(3) \wedge g(1) - g(3) = h(1) - h(3)$

implica que $f(1) - f(3) = h(1) - h(3)$

Por transitividad de la igualdad $\Rightarrow f(1) + h(3) = h(1) + f(3)$ ✓

Atrás

(1.2) pudimos verificar que es transitiva

como R es (S); (T); (R) $\Rightarrow$ Es una relacion de equivalencia ✓

Es antisimetrica?

Falso

Contra ejemplo sea

$f(1)=0 \quad f(5)=1 \qquad g(1)=0 \quad g(5)=0$

$f(2)=1 \quad f(6)=1 \quad \wedge \quad g(2)=0 \quad g(6)=0$

$f(3)=0 \quad f(7)=1 \qquad g(3)=0 \quad g(7)=0$

$f(4)=1 \quad f(8)=1 \qquad g(4)=0 \quad g(8)=0$

Una relacion es antisimetrica $\Leftrightarrow$

$\forall f, g \in A \; [fRg \wedge gRf \Rightarrow f=g]$

En nuestro caso seria

si $f(1)+g(3)=f(3)+g(1) \wedge g(1)+f(3)=g(3)+f(1) \Rightarrow f=g$

$0+0=0 \quad 0 \wedge 0+0=0+0$

V V $\Rightarrow$ F

se cumple la hipatesis y f y g son distintas. ✓

Por lo tanto, la relacion no es Antisimetrica

1.) Sea $\bar{g} = \{ f \in X \mid f R g \}$ el conjunto de funciones que se relacionan con g.

Reescribiendo la relación

$$f R g \iff f(1) - f(3) = g(1) - g(3)$$

Veamos todas las posibilidades par $g(1) - g(3)$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{si } g(1) = 0 \wedge g(3) = 0 & \Rightarrow & g(1) - g(3) = 0 \\ \text{si } g(1) = 1 \wedge g(3) = 0 & \Rightarrow & g(1) - g(3) = 1 \\ \text{si } g(1) = 0 \wedge g(3) = 1 & \Rightarrow & g(1) - g(3) = -1 \\ \text{si } g(1) = 1 \wedge g(3) = 1 & \Rightarrow & g(1) - g(3) = 0 \end{array}\right\} \text{tres posibilidades}$$

✓

Clase 1:

$$\text{Si} \begin{cases} (g(1) = 0 \wedge g(3) = 0) \\ \vee \\ (g(1) = 1 \wedge g(3) = 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} (f(1) = 0 \wedge f(3) = 0) \\ \vee \\ (f(1) = 1 \wedge f(3) = 1) \end{array}$$

Esto cuenta como una sola clase de quivalencia cuyo representante podría ser ✓

$$\begin{array}{ll} g(1) = 0 & g(5) = 0 \\ g(2) = 0 & g(6) = 0 \\ g(3) = 0 & g(7) = 0 \\ g(4) = 0 & g(8) = 0 \end{array}$$

Ahora, podríamos preguntarnos por qué dos caso son solo una clase de equivalencia

Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} g(1) = 0 \wedge g(3) \\ g(1) = 1 \wedge g(1) \end{array}\right\} \text{cuentan como una sola clase?}$$

1.4

Supongamos una funcion $f / f(1)=0 \wedge f(3)=0$
y otra $g / g(1)=1 \wedge g(3)=1$.
Ahora veamos si estan relacionados

$$f R g \Leftrightarrow f(1)-f(3) = g(1)-g(3)$$
$$0 - 0 = 1 - 1$$
$$0 = 0$$

con esto podemos comprobar que ambos casos estan relacionados. Es decir cuentan como una sola clase de equivalencia ✓

Clase 2

$(g(1)=1 \wedge g(3)=0) \Leftrightarrow (f(1)=1 \wedge f(3)=0)$

Aca surge otra clase las funciones $g / g(1)=1 \wedge g(3)=0$ un representante podria ser

$$\begin{cases} g(1)=1 & g(5)=0 \\ g(2)=0 & g(6)=0 \\ g(3)=0 & g(7)=0 \\ g(4)=0 & g(8)=0 \end{cases}$$

✓

Clase 3

$(g(1)=0 \wedge g(3)=1) \Leftrightarrow (f(1)=0 \wedge f(3)=1)$

Aca surge la ultima clase de equivalencia cuyo representante podria ser.

$$\begin{cases} g(1)=0 & g(5)=0 \\ g(2)=0 & g(6)=0 \\ g(3)=1 & g(7)=0 \\ g(4)=0 & g(8)=0 \end{cases}$$

Esta clase son las funciones $g / g(1)=0 \wedge g(3)=1$ ✓

(1.5) Por ultimo podriamos verificar que los tres conjuntos son disjuntos

si $g(1)=0 \wedge g(3)=0 \Rightarrow g(1)-g(3) \neq 1,-1$

si $g(1)=1 \wedge g(3)=0 \Rightarrow g(1)-g(3) \neq 0;-1$

si $g(1)=0 \wedge g(3)=1 \Rightarrow g(1)-g(3) \neq 0,1$

Con esto verificamos qu son disjuntas cada clase

Conclusion: Son 3 clases

② Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} (n-i)\cdot 2^{i-1} = 2^n - n - 1$$

Probamos casos

si $n=1$ $\sum_{i=1}^{1} (1-i)\cdot 2^{i-1} = 2^1 - 1 - 1 \Leftrightarrow (1-1)2^{1-1} = 2-2$

$\Leftrightarrow 0=0$

Se cumple la igualdad

si $n=2$ $\sum_{i=1}^{2} (2-i)2^{i-1} = 2^2 - 2 - 1 \Leftrightarrow (2-1)2^0 + (2-2)\cdot 2^{2-1} = 1$

$\Leftrightarrow 1\cdot 1 + 0 = 1$

Se cumple la igualdad

Pero, como queremos probar para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que usar iducción

Caso Base $n=1$ Ya fue probado arriba

Paso de inducción

$$\sum_{i=1}^{n} (n-i)\cdot 2^{i-1} = 2^n - n - 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} (n+1-i)\cdot 2^{i-1} = 2^{n+1} - n - 1 - 1$$

Empezaré descomponiendo la sumatoria hasta que aparezca algo parecido a la HI (hipotesis de inducción

$$\sum_{i=1}^{n+1} (n+1-i)\cdot 2^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} (n+1-i)\, 2^{i-1} + \underbrace{(n+1-(n+1))}_{0}\cdot 2^{n+1-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [(n+1-i)\cdot 2^{i-1}]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [(n-i)\cdot 2^{i-1} + 2^{i-1}] = \sum_{i=1}^{n} (n-i)\cdot 2^{i-1} + \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}$$

(2.1)

Iguales

$$= \sum_{i=1}^{n} (n-i)\cdot 2^{i-1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} (n-i)\cdot 2^{i-1} + \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i}}$$

$$= \quad '' \quad + \sum_{i=0}^{n-1} (2^{i}) + 2^{n} - 2^{n}$$

$$= \quad '' \quad + \sum_{i=0}^{n} 2^{i} - 2^{n} \; *$$

$$* \quad \boxed{\sum_{i=0}^{n} 2^{i} = \frac{2^{n+1}-1}{2-1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (n-i)\cdot 2^{i-1} + \frac{2^{n+1}-1}{2-1} - 2^{n}$$

$$= \quad '' \quad + 2^{n+1} - 1 - 2^{n}$$

$$+ 2\cdot 2^{n} - 1 - 2^{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (n-i)\cdot 2^{i-1} + 2^{n} - 1$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n+1} [(n+1-i)\cdot 2^{i-1}] = \sum_{i=1}^{n} [(n-i)\cdot 2^{i-1}] + 2^{n} - 1}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} [(n+1-i)\cdot 2^{i-1}] \overset{HI}{=} (2^{n}-n-1) + 2^{n} - 1 = 2\cdot 2^{n} - n - 2 = \underline{2^{n+1} - n - 2}$$

Así concluimos que se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$

③ $f: \{1;2;\ldots 10\} \to \{1;2;\ldots 12\}$ No inyectiva con $f(1) < f(3) < f(5)$

$\{f(1); f(3); f(5); f(2); f(4); f(6); f(7); f(8); f(9)$
$f(10)\}$

• Primero calcularé la cantidad total de funciones tal que se cumpla $f(1) < f(3) < f(5)$ sin tener en cuenta si son inyectivas.

Para lograr contar $f(1) < f(3) < f(5)$ basta con contar las formas de elegir 3 elementos de los 12 posibles es decir $\binom{12}{3}$

esto hará que no contemos permutaciones

• para las demas $f(x)$ pueden tomar cualquier valor, por lo tanto, 12^7

$$total = 12^7 \cdot \binom{12}{3}$$ ✓

Para calcular la cantidad de funciones inyectivas.

$$Inyectivas = \binom{12}{3} \cdot \frac{9!}{2!}$$

• Para $f(1) < f(3) < f(5)$ es lo mismo que antes
• Para los demas $f(x)$ hay que descontar las posibilidades usadas para $\binom{12}{3}$ y quedaria $= \frac{9!}{2!}$ ✓

Atras sigue

9.1) Si resto del "total" de funciones tales que $f(1) < f(3) < f(5)$ las funciones que $f(1) < f(3) < f(5)$ y inyectivas. Entonces, me quedan las funciones tales que $f(1) < f(3) < f(5)$ y no son inyectivas.

En simbolos:

Considerando solo las funciones que $f(1) < f(3) < f(5)$

$$\{\text{No Inyectivas}\} = \{\text{total}\} - \{\text{Inyectivas}\}$$

$$\text{"} \quad = 12^7 \cdot \binom{12}{3} - \binom{12}{3} \cdot \frac{9!}{2!}$$

Ej 4 $a \perp b$ calcular $(a^2+3b^2 : 2a^2+11b^2) = d$

Por def de MCD d tiene que dividir ambas expresiones. Suponiendo eso

$\boxed{d|a \wedge d|b \Rightarrow d|a+b}$

- $\begin{cases} d|a^2+3b^2 \\ d|2a^2+11b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} d|2a^2+6b^2 \\ d|2a^2+11b^2 \end{matrix} \Rightarrow d|2a^2+11b^2-2a^2-6b^2$

$\underset{\text{Propiedad}}{\boxed{d|a \Rightarrow d|b.a}}$ $\Rightarrow \underline{d|5b^2}$

- $\begin{cases} d|a^2+3b^2 \\ d|2a^2+11b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \overset{\times 11}{d|11a^2+33b^2} \\ \overset{\times 3}{d|6a^2+33b^2} \end{matrix} \Rightarrow d|11a^2+33b^2-6a^2-33b^2$

$\Rightarrow \underline{d|5a^2}$

Ahora si $d|5a^2 \wedge d|5b^2 \Rightarrow d|(5a^2 : 5b^2)$

$\Rightarrow d|5(a^2 : b^2)$ $\boxed{|c|(a:b) = (ac:cb)}$

$d|5(a:b)^2$ $\overset{a \perp b}{}$ $\boxed{(a^n : b^n) = (a:b)^n}$

$d|5 \cdot 1^2$

$d|5$

Ahora sabemos que d tiene que ser un divisor positivo de 5

$Div_+(5) = \{1;5\} \Rightarrow d \in \{1;5\}$

Probamos si 5 divide a ambas expresiones. Para ser exhaustivos calcularemos con todas las posibilidades de a y $b \in \mathbb{N}$ por medio de una tabla de restos

4.1

Tabla de restos de a^2+3b^2

	b	0	1	2	3	4
	b^2	0	1	4	4	1
	$3b^2$	0	3	2	2	3
a	a					
0	0	0	3	2	2	3
1	1	1	4	3	3	4
2	4	4	2	1	1	2
3	4	4	2	1	1	2
4	1	1	4	3	3	4

Para el unico caso en él que el resto de dividir por 5 es 0 es cuando y

$a \equiv 0 \ (5) \wedge b \equiv 0 \ (5)$

$\Updownarrow$

$5 \mid a \wedge 5 \mid b$

Pero sabemos que $a \perp b$ por lo tanto descartamos ese caso. ✓

Con esta tabla podemos verificar que $a^2+3b^2 \not\equiv 0 \ (5)$ con $a \perp b$

Entonces $d \neq 5$

Nota: no hace falta verificar la otra expresion ya que 5 tendria que poder dividir a ambos para poder ser MCD ✓

La otra opcion es que $d = 1$

Si $a = 1 \wedge b = 2 \Rightarrow (1^2+3\cdot 2^2 : 2\cdot 1^2+11\cdot 2^2) = 1$ ✓

$1 \perp 2$

La unica posibilidad para el MCD es 1 ✓

$(a^2+3b^2 ; 2a^2+11b^2) = 1$ con $a \perp b$ ✓