

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Primer Recuperatorio del Segundo Parcial (09/12/2024) - 2do. Cuatrimestre 2024

TEMA 2

1	2	3	4	Nota
B	B	B	B	10 (diez)

Apellido: De Luca

Nro. de libreta:

Nro de práctica: 1

Nombre: Santiago De Luca Carrera: Lic. en Ciencias de Datos

1. Sea  $f$  una función de clase  $C^2$  tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en el punto  $(0, 1)$  es

$$P(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - xy + y^2 + x + 7,$$

y sea

$$g(x, y) = 3x^2y + x^2 + e^{f(x,y)-8} - 2y.$$

Analizar si  $g(x, y)$  posee un extremo local en  $(0, 1)$ .

2. Encontrar, si existen, los extremos absolutos de  $f(x, y) = x^3 - y^2$  restringida a la región

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1, y \geq \sqrt{2}x\}.$$

3. Avanzar la convergencia de las integrales:

a)  $\int_1^3 \frac{e^{3x-3} - 1}{\sqrt{x-1}} dx.$

b)  $\int_2^{+\infty} \frac{\sin^2(e^{x^2}) + 1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}} dx.$

4. Calcular

$$\iiint_D \frac{y}{(x^2 + z^2)^2 + 1} dV,$$

siendo

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + z^2 \leq 16, z \leq x, 0 \leq y \leq \sqrt{x^2 + z^2}\}.$$

Escribir todos los razonamientos que justifican las respuestas.

1.  $P(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - xy + y^2 + x + 7$  es el polinomio de Taylor de orden 2 en el  $(0, 1)$  de  $f$ , entonces se que:

$$\begin{aligned} \bullet P(0, 1) &= f(0, 1) & \bullet P_{xx}(0, 1) &= f_{xx}(0, 1) \\ \bullet P_x(0, 1) &= f_x(0, 1) & \bullet P_{yy}(0, 1) &= f_{yy}(0, 1) \\ \bullet P_y(0, 1) &= f_y(0, 1) & \bullet P_{xy}(0, 1) &= f_{xy}(0, 1) \end{aligned}$$

+ observación: como  $f$  es  $C^2$  entonces  $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$

Busco estos valores porque los necesitare para analizar  $g$ .

$$P(0, 1) = 0 - 0 + 1 + 0 + 7 = 8$$

$$\Rightarrow f(0, 1) = 8$$

$$P_x(x, y) = x - y + 1 \Rightarrow P_x(0, 1) = 0 - 1 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow f_x(0, 1) = 0$$

$$P_y(x, y) = -x + 2y \Rightarrow P_y(0, 1) = -0 + 2 = 2$$

$$\Rightarrow f_y(0, 1) = 2$$

$$P_{xx}(x, y) = 1 \Rightarrow P_{xx}(0, 1) = 1 \Rightarrow f_{xx}(0, 1) = 1$$

$$P_{yy}(x, y) = 2 \Rightarrow P_{yy}(0, 1) = 2 \Rightarrow f_{yy}(0, 1) = 2$$

$$P_{xy}(x, y) = -1 \Rightarrow P_{xy}(0, 1) = -1 \Rightarrow f_{xy}(0, 1) = -1$$

Si  $(0, 1)$  es extremo local de  $g$  entonces es punto critico (PC) de  $g$ . Veo si esto es así:

$(0, 1)$  es PC de  $g$  si y solo si  $\nabla g(0, 1) = (0, 0)$  o  $\nabla g(0, 1) = (0, 0)$

$g$  es una función  $C^2$  por ser suma de

composicion de funciones  $C^2 \Rightarrow \exists \nabla g(x, y) \neq (0, 0) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Busco  $\nabla g(0, 1) = (g_x(0, 1), g_y(0, 1))$

$$g_x(x, y) = 6xy + 2x + e^{f(x, y)-8} \cdot f_x(x, y)$$

$$\Rightarrow g_x(0, 1) = 0 + 0 + e^{f(0, 1)-8} \cdot f_x(0, 1) \\ = e^{8-8} \cdot 0 = 0$$

$$g_y(x, y) = 3x^2 + e^{f(x, y)-8} \cdot f_y(x, y) - 2$$

$$\Rightarrow g_y(0, 1) = 0 + e^{f(0, 1)-8} \cdot f_y(0, 1) - 2 \\ = e^0 \cdot 2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \nabla g(0, 1) = (g_x(0, 1), g_y(0, 1)) = (0, 0)$$

$\therefore (0, 1)$  es PC de  $g(x, y)$  ✓

Para ver si  $(0, 1)$  es máximo local, mínimo local o punto silla de  $g$  usaré el criterio del Hessiano:

$$\text{Necesito } Hg(0, 1) = \begin{pmatrix} g_{xx}(0, 1) & g_{xy}(0, 1) \\ g_{xy}(0, 1) & g_{yy}(0, 1) \end{pmatrix} \quad \left( g_{xy} = g_{yx} \right)$$

$$g_{xx}(x, y) = 6y + 2 + e^{f(x, y)-8} \cdot (f_x(x, y))^2 + e^{f(x, y)-8} \cdot f_{xx}(x, y)$$

$$\Rightarrow g_{xx}(0, 1) = 6 + 2 + e^{f(0, 1)-8} \cdot (f_x(0, 1))^2 + e^{f(0, 1)-8} \cdot f_{xx}(0, 1) \\ = 8 + e^0 \cdot 0 + e^0 \cdot 1 \\ = 9$$

$$g_{yy}(x, y) = e^{f(x, y)-8} \cdot (f_y(x, y))^2 + e^{f(x, y)-8} \cdot f_{yy}(x, y)$$

$$\Rightarrow g_{yy}(0, 1) = e^{f(0, 1)-8} \cdot (f_y(0, 1))^2 + e^{f(0, 1)-8} \cdot f_{yy}(0, 1) \\ = e^0 \cdot 4 + e^0 \cdot 2 = 6$$

$$g_{xy}(x, y) = 6x + e^{f(x, y)-8} \cdot f_y(x, y) \cdot f_x(x, y) + e^{f(x, y)-8} \cdot f_{xy}(x, y) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow g_{xy}(0, 1) = 0 + e^{f(0, 1)-8} \cdot f_y(0, 1) \cdot f_x(0, 1) + e^{f(0, 1)-8} \cdot f_{xy}(0, 1) \\ = e^0 \cdot 2 \cdot 0 + e^0 \cdot (-1) = -1$$

$$\therefore Hg(0, 1) = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

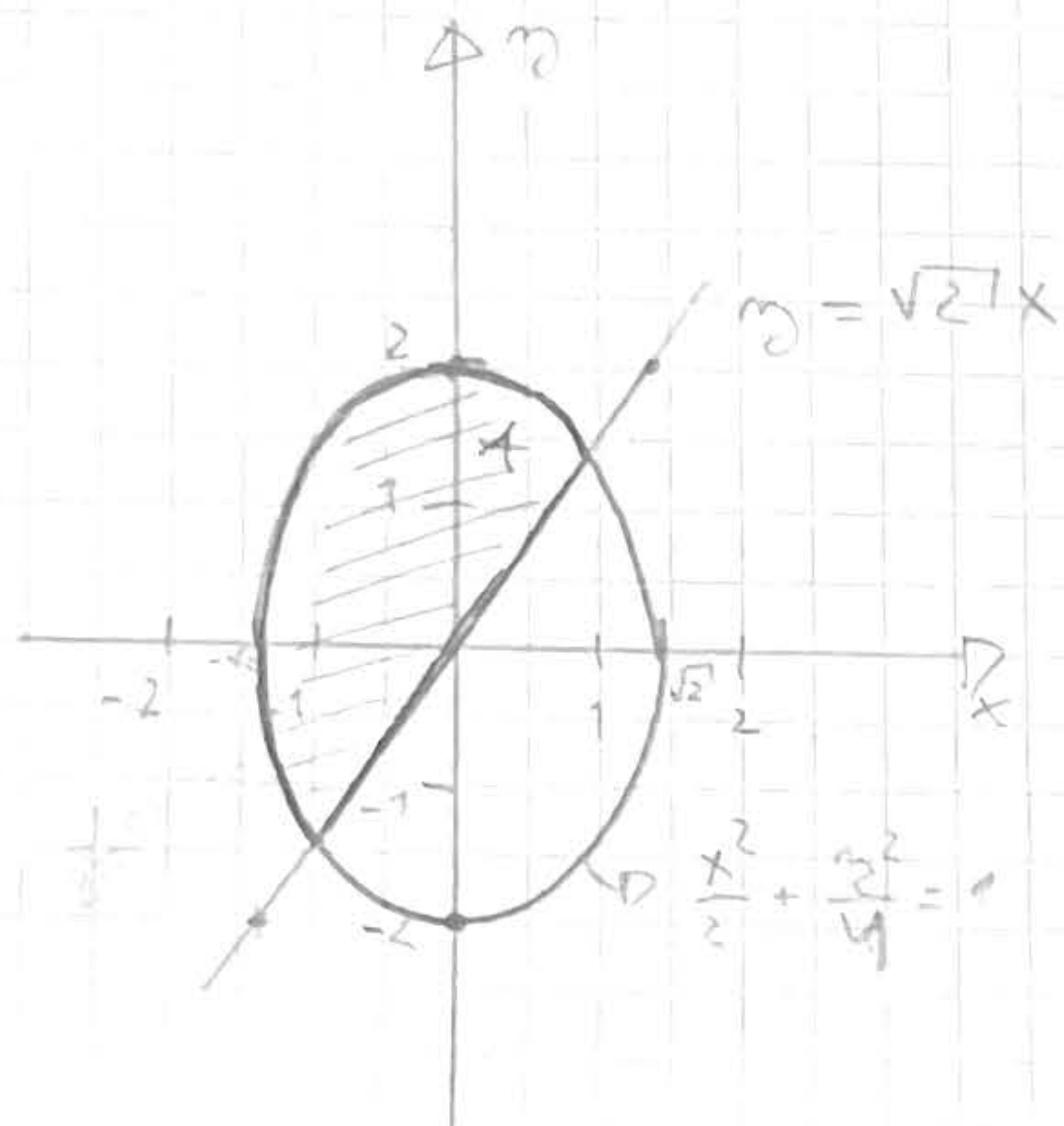
$$\Rightarrow \det(Hg(0, 1)) = 9 \cdot 6 - 1 = 53 > 0 \quad \text{y } g_{xx}(0, 1) = 9 > 0$$

$\therefore (0, 1)$  es mínimo local de  $g$ , es decir, extremo local de  $g$  ✓

$$2. f(x, y) = x^3 - y^2$$

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1, y \geq \sqrt{2}x \right\}$$

Gráfico A:



Busco la intersección:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1 \wedge y = \sqrt{2}x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4} \cdot 2x^2 = 1$$

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 = 1$$

$$x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = \sqrt{2}$$

$$\text{a } x = -1 \Rightarrow y = -\sqrt{2}$$

$(1, \sqrt{2}), (-1, -\sqrt{2})$  son los

puntos de intersección.

Como A es una región cerrada y acotada (compacta) y f es una función continua en  $\mathbb{R}^2$  por ser un polinomio (en particular, continua en A), vale el teorema de Weierstrass que me asegura que f alcanza máximos y mínimos absolutos en A.

$\Rightarrow$  Busco PC de  $f|_A$  y armo tabla de valores para decidir máximos y mínimos.

E es el interior de A:

$(x, y)$  es PC de f si y solo si  $\nabla f(x, y) = 0$

$$\nabla f(x, y) = (0, 0)$$

f es  $C^2$  por ser polinomio  $\Rightarrow \exists \nabla f(x, y) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (3x^2, -2y)$$

$$(3x^2, -2y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

pero  $(0, 0) \notin \text{int}(A)$  porque está en el borde de  $y = \sqrt{2}|x|$ .

En el borde de  $y = \sqrt{2}|x|$ :

$$\text{Param } \alpha(t) = (t, \sqrt{2}|t|), t \in [-1, 1]$$

( $t \in [-1, 1]$  solo de la intersección calculada al principio)

$$\begin{aligned} \text{Param } g(t) = f \circ \alpha(t) &= f(t, \sqrt{2}|t|), t \in [-1, 1] \\ &= t^3 - 2t^2 \end{aligned}$$

Busco PC de  $g(t)$ :

I)  $g(t)$  es derivable en  $\mathbb{R}$  por ser polinomio

$$\text{II) } g'(t) = 3t^2 - 4t = t(3t - 4)$$

$$\Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ o } t = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha(0) &= (0, 0) = P_1 \\ \alpha\left(\frac{4}{3}\right) &= \left(\frac{4}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right) \notin A = P_2 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \Rightarrow \alpha(0) \\ \alpha\left(\frac{4}{3}\right) \end{aligned}} \right\} \text{son PC de } f|_A$$

$$\begin{aligned} \text{III) } \alpha(-1) &= (-1, -\sqrt{2}) = P_3 \\ \alpha(1) &= (1, \sqrt{2}) = P_4 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \alpha(-1) \\ \alpha(1) \end{aligned}} \right\} \text{son PC de } f|_A \text{ por ser los extremos del intervalo de } t$$

En el borde  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ :

Piense este borde como los puntos de la curva de nivel 1 de la función  $h(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2$  que verifican  $y \geq \sqrt{2}|x|$ .

Uso el método de Multiplicadores de Lagrange:

I)  $\exists \nabla f(x, y) \neq (x, y) \in \mathbb{R}^2$  porque  $f$  es polinomio no sobes quita.

II)  $h(x, y)$  es  $C^1 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  porque es polinomio  $h$ .

$$\text{III) } \nabla h(x, y) = (h_x(x, y), h_y(x, y)) = (x, \frac{1}{2}y)$$

$\Rightarrow \nabla h(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$

pero  $h(0, 0) = 0 \neq 1$  no cumple con mi restricción.

IV) Busco  $(x, y)$  tales que:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla h(x, y) \\ h(x, y) = 1 \\ y \geq \sqrt{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x^2, -2y) = \lambda (x, \frac{1}{2}y) \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1 \\ y \geq \sqrt{2}x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 3x^2 = \lambda x & (1) \\ -2y = \frac{1}{2}\lambda y & (2) \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1 & (3) \\ y \geq \sqrt{2}x & (4) \end{cases}$$

Si  $x = 0$ :

(3)  $\frac{1}{4}y^2 = 1$   
 $y^2 = 4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow$  (4)  $2 \geq 0 \checkmark \Rightarrow \lambda = -4$   
 $y^2 = 4 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow$  (4)  $-2 \geq 0$  ABS

$\Rightarrow P_5 = (0, 2) \in PC \checkmark$

Si  $y = 0$ :

(3)  $\frac{1}{2}x^2 = 1$   
 $x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow$  (4)  $0 \geq 2$  ABS  
 $x = -\sqrt{2} \Rightarrow$  (4)  $0 \geq -2 \checkmark \Rightarrow \lambda = \frac{6}{-\sqrt{2}}$

$\Rightarrow P_6 = (-\sqrt{2}, 0) \in PC \checkmark$

Si  $x \neq 0, y \neq 0$ :

(2)  $-2y = \frac{1}{2}\lambda y$   
 $-2 = \frac{1}{2}\lambda$   
 $-4 = \lambda \Rightarrow$  (1)  $3x^2 = -4x$

$3x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$   
 (3)  $\frac{1}{2} \cdot \frac{16}{9} + \frac{1}{4}y^2 = 1$

$y^2 = \frac{4}{9}$   
 $\frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{9}$

$$y^2 = \frac{4}{9} \begin{cases} y = \frac{2}{3} \Rightarrow \textcircled{4} & \frac{2}{3} \geq -\frac{4}{3}\sqrt{21} \checkmark \\ y = -\frac{2}{3} \Rightarrow \textcircled{4} & -\frac{2}{3} \geq -\frac{4}{3}\sqrt{21} \approx -1,88 \checkmark \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = P_7$$

$$\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) = P_8 \quad \checkmark$$

En la intersección de los bordes:

son  $P_3$  y  $P_4$  ya incluidos entre los  $P_C$ .

∴ A sumo tabla de valores y decide máximos y mínimos:

$P_C$	$f(P_C)$
$(0, 0)$	$0 \rightarrow$ máximo
$\left(\frac{4}{3}, \frac{4\sqrt{21}}{3}\right) \notin A$	$\frac{64}{27} - \frac{32}{9} = -\frac{32}{27} \approx -1,185$
$(-1, -\sqrt{21})$	$-1 - 2 = -3$
$(1, \sqrt{21})$	$1 - 2 = -1$
$(0, 2)$	$0 - 4 = -4 \rightarrow$ mínimo
$(-\sqrt{21}, 0)$	$-2\sqrt{21} \approx -2,82$
$\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$	$-\frac{64}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{76}{27} \approx -2,81$
$\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{64}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{76}{27} \approx -2,81$

∴  $(0, 0)$  es máximo absoluto de  $f|_A$

$(0, 2)$  es mínimo absoluto de  $f|_A$

RTA

$$3. a) \int_1^3 \frac{e^{3x-3} - 1}{\sqrt{x-1}} dx$$

Sospecho que converge, acoto el integrando que llamo  $f(x) = \frac{e^{3x-3} - 1}{\sqrt{x-1}}$

Por mi intervalo de integración sé que:

$$x \leq 3$$

$$3x \leq 3 \cdot 3$$

$$3x - 3 \leq 9 - 3$$

$$3x - 3 \leq 6$$

$$\Rightarrow e^6 \approx 403,428 \leq 404$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{e^{3x-3} - 1}{\sqrt{x-1}} \leq \frac{e^6 - 1}{\sqrt{x-1}} \leq \frac{404 - 1}{\sqrt{x-1}} = \frac{403}{\sqrt{x-1}} = g(x)$$

$$\Rightarrow \int_1^3 \frac{403}{\sqrt{x-1}} dx = 403 \cdot \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$$

Converge por ser integral P con  $P = 1/2$

y ser del estilo  $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$  ✓

$$\Rightarrow \text{Si } f(x) \leq g(x) \text{ y } \int_1^3 g(x) dx \text{ converge}$$

∴ Por comparación  $\int_1^3 f(x) dx$  converge

$$\text{es decir } \boxed{\int_1^3 \frac{e^{3x-3} - 1}{\sqrt{x-1}} dx \text{ converge RTT}} \quad \checkmark$$

$$b) \int_2^{+\infty} \frac{\ln^2(e^{x^2}) + 1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}} dx$$

Sospecho que diverge, acoto el integrando que llamo  $f(x) = \frac{\ln^2(e^{x^2}) + 1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}$



Sea que:

$x \geq x-1$  vale porque  $x \geq 2$  en un intervalo de integración  
 $\Rightarrow x-1 \geq 1$   
 $x \geq 1$

$$x^2 \geq (x-1)^2$$

No cambia la base porque  $(x-1) \geq 1$

$$\frac{1}{(x+1)^2} \geq \frac{1}{x^2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{(x-1)^2}} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}$$

Por otro lado,  $\sin^2(e^{x^2}) \geq 0$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sin^2(e^{x^2}) + 1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}} \geq \frac{0+1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{x \cdot x^2}} = \frac{1}{x} = g(x)$$

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  diverge por ser integral  $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$  con  $p=1$  e ir a  $+\infty$ .

$\Rightarrow 0 \leq g \leq f$   $\int_2^{+\infty} g(x) dx$  diverge

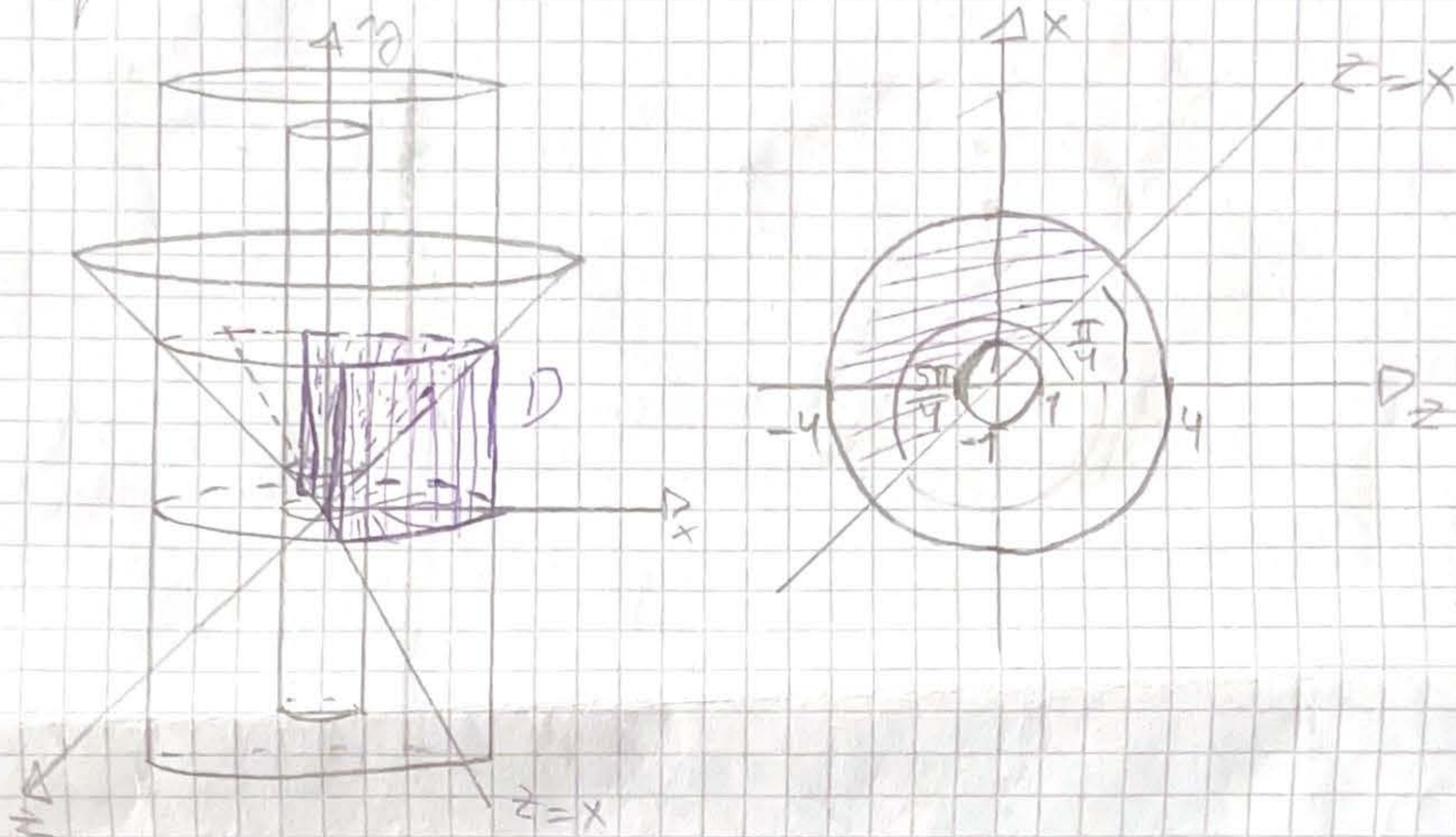
Por comparación,  $\int_2^{+\infty} f(x) dx$  diverge

es decir,  $\int_2^{+\infty} \frac{\sin^2(e^{x^2}) + 1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}} dx$  diverge. RTA

$$4. \iiint_D \frac{y}{(x^2+z^2)^2+1} dV$$

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + z^2 \leq 16, z \leq x, 0 \leq y \leq \sqrt{x^2 + z^2} \right\}$$

Gráfico D:



Use coordenadas cilíndricas con la siguiente transformación:

$$T(\rho, \theta, y) = \begin{cases} x = \rho \sin \theta \\ z = \rho \cos \theta \\ y = y \end{cases}$$

donde  $\rho = \sqrt{x^2 + z^2}$  y  $\theta$  el ángulo en el plano  $xz$   
 $\Rightarrow J T(\rho, \theta, y) = \rho$

Para hallar  $\theta$  use la recta  $z = x$  para encontrar el mínimo y el máximo de  $\theta$

$$z = x \Leftrightarrow \rho \cos \theta = \rho \sin \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ ó } \theta = \frac{5}{4}\pi \Rightarrow \left( \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5}{4}\pi \right)$$

Para hallar  $\rho$  uso la desigualdad

$$1 \leq x^2 + z^2 \leq 16 \Leftrightarrow 1 \leq r^2 \leq 16 \Leftrightarrow \boxed{1 \leq r \leq 4}$$

Para hallar  $\eta$  uso la desigualdad:

$$0 \leq \eta \leq \sqrt{x^2 + z^2} \Leftrightarrow \boxed{0 \leq \eta \leq r}$$

$$\iiint_D \frac{\eta}{(x^2 + z^2)^2 + 1} dV = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_1^4 \int_0^r \frac{\eta}{r^4 + 1} \cdot r d\eta dr d\theta$$

$$= \left( \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} 1 d\theta \right) \cdot \int_1^4 \int_0^r \frac{r}{r^4 + 1} \cdot \eta d\eta dr$$

$$= \pi \cdot \int_1^4 \frac{r}{r^4 + 1} \cdot \frac{1}{2} (\eta^2) \Big|_{\eta=0}^{\eta=r} dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \int_1^4 \frac{r^3}{r^4 + 1} dr = \frac{\pi}{2} \int_2^{257} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t} dt$$

$t = r^4 + 1$   
 $dt = 4r^3 dr$  sustitución

$$= \frac{\pi}{8} \int_2^{257} \frac{1}{t} dt = \frac{\pi}{8} \cdot (\ln |t|) \Big|_2^{257} = \boxed{\frac{\pi}{8} \cdot (\ln 257 - \ln 2)}$$

RTA

\* Clarificación: elegí  $x = r \cos \theta$  y no  $x = r \cos \phi$  para que ángulo en el plano  $xz$  se recorra

en sentido antihorario (hacia allá)

y me facilite pensar  $\theta$ .