¡Excelente examen!

1	2	3	4	Nota
B	B	B	B	10 (diez)

APELLIDO Y NOMBRE: ZEVALLOS, DIEGO IGNACIO N° DE LIBRETA:

CARRERA:

TURNO: 9 a 14hs. A-K ☐ 9 a 14hs. L-Z ☐ 14 a 19hs. ☐ 17 a 22hs. ☒

Álgebra I

Primer Cuatrimestre 2024 - Segundo parcial - 02/07/2024

Ejercicio 1. Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ que satisfacen simultáneamente

$$\begin{cases} 3a \equiv 12 & (\text{mód } 24) \\ a \equiv 10 & (\text{mód } 30) \\ 20a \equiv 50 & (\text{mód } 125) \end{cases}$$

Ejercicio 2. Hallar todos los primos $p \in \mathbb{N}$ tales que

$$3^{p^2+3} \equiv -84 \quad (\text{mód } p) \quad \text{y} \quad (7p+8)^{2024} \equiv 4 \quad (\text{mód } p)$$

Ejercicio 3. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ la sucesión de polinomios en $\mathbb{R}[X]$ definida como:

$$f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20 \ \text{ y } \ f_{n+1} = (X+2)^2 f_n' + 3f_n \ \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que -2 es raíz doble de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4.

a) Determinar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ (**positivo**) para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio f obtenido como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.

Justifique todas sus respuestas.

①

$24 = 8 \cdot 3$

$30 = 3 \cdot 10$

$125 = 5^3$.

$$\begin{cases} 3a \equiv 12 \ (24) & ① \\ a \equiv 10 \ (30) & ② \\ 20a \equiv 50 \ (125) & ③ \end{cases}$$

De ① $3a \equiv 12 \ (24) \underset{8 \perp 3}{\iff} \begin{cases} 3a \equiv 12 (3) \\ 3a \equiv \underbrace{12}_{\equiv 4(8)} (8) \end{cases} \underset{5 \perp 8}{\iff} \begin{cases} 0 \equiv 0 (3) \text{ (se cumple } \forall a \in \mathbb{Z}) \\ 3 \cdot 5a \equiv 5 \cdot 4 (8) \end{cases}$

$\Updownarrow$

$-a \equiv 4 (8) \iff \boxed{a \equiv 4 (8)}$

De ② $a \equiv 10 \ (30) \underset{3 \perp 10}{\iff} \begin{cases} a \equiv 10 (3) \\ a \equiv 10 (10) \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} a \equiv 1 (3) \\ a \equiv 0 (10) \end{cases}}$

De ③

$$20a \equiv 50 \ (125) \ \div 5 \iff 4a \equiv 10 \ (25)$$

$$\underset{6 \perp 25}{\iff} 6 \cdot 4a \equiv 6 \cdot 10 \ (25)$$

$$\iff -a \equiv 10 \ (25)$$

$$\underset{-1 \perp 25}{\iff} \boxed{a \equiv 15 \ (25)}$$

Junto todo:

$$\begin{cases} a \equiv 1 (3) & ①' \\ a \equiv 4 (8) & ②' \\ a \equiv 0 (10) & ③' \\ a \equiv 15 (25) & ④' \end{cases}$$

~~Por T.Ch.R, ∃! 0 ≤ x0 < 6000 t.q a ≡ x0 (6000). Lo hallo.~~

Veo si hay incompatibilidad con ②' y ④'

③' $a \equiv 0 \ (10) \underset{2 \perp 5}{\iff} \begin{cases} a \equiv 0 (2) \\ a \equiv 0 (5) \end{cases}$

②' $a \equiv 4 (8) \underset{2 | 8}{\implies} a \equiv 4 (2) \iff \boxed{a \equiv 0 (2)}$

④' $a \equiv 15 (25) \underset{5 | 25}{\implies} a \equiv 15 (5) \iff \boxed{a \equiv 0 (5)}$

Por lo tanto puedo descartar ③', pues las demás ecuaciones la implican. Luego,

$$\begin{cases} a \equiv 1 \ (3) & ① \\ a \equiv 4 (8) & ② \\ a \equiv 15 (25) & ③ \end{cases}$$

Por T.Ch.R, como $3 \perp 8 \perp 25$, $\exists! \ 0 \leq x_0 < 600$ t.q $a \equiv x_0 \ (600)$. Lo hallo.

De ③

$a = 25k + 15$, $k \in \mathbb{Z}$. Reemplazo en ②.

$$25k + 15 \equiv 4 (8)$$

$$\iff k - 1 \equiv 4 \ (8)$$

$$\iff \boxed{k \equiv 5 (8)} \iff k = 8j + 5, \ j \in \mathbb{Z}.$$

$\boxed{\text{Sigo atrás}}$

ZEVALLOS, DIEGO I. ①

Luego, $a = 25(8j+5)+15$
$\Leftrightarrow \boxed{a = 200j + 140}$ Reemplazo en Ⓑ.

$200j + 140 \equiv 1 (3)$
$\Leftrightarrow \cancel{2}j + \cancel{2} \equiv 1 (3) \Leftrightarrow j \equiv 2 - 1 (3)$
$\Leftrightarrow \boxed{j \equiv 1 (3).} \Leftrightarrow j = 3q+1, q \in \mathbb{Z}.$

Por lo tanto,

$a = 200(3q+1)+140$
$\boxed{a = 600q + 340} \Leftrightarrow \boxed{a \equiv 340 (600)}$

∴ Rta: Los $a \in \mathbb{Z}$ que cumplen lo pedido son los $a \equiv 340 (600)$.

② ① $3^{p^2+3} \equiv -84 (p)$
② $(7p+8)^{2024} \equiv 4 (p)$.

Empiezo por ①

$3^{p^2+3} \equiv -84 (p)$ — $\boxed{p|3}$ / $\boxed{p\nmid 3}$ 2 casos

$\Rightarrow p=3$

• Si $p|3$: $3^{p^2+3} \equiv 0 (p)$
$\Leftrightarrow 3^{p^2+3} \equiv -84 (p)$
$\Leftrightarrow 0 \equiv -28 \cdot 3 (p)$
$\Leftrightarrow \boxed{0 \equiv 0 (p)}$ $\Rightarrow$ p puede ser 3.
p primo

• Si $p \nmid 3$: $3^{p^2+3} \equiv -84 (p)$
$\Leftrightarrow 3^{p^2+3} + 84 \equiv 0 (p)$
$\Leftrightarrow 3^{(p^2-1)+4} + 84 \equiv 0 (p)$
$\Leftrightarrow 3^{p^2-1} \cdot 3^4 + 84 \equiv 0 (p)$
$\Leftrightarrow 3^{(p-1)(p+1)} \cdot 3^4 + 84 \equiv 0 (p)$
$\Leftrightarrow (3^{p-1})^{p+1} \cdot 3^4 + 84 \equiv 0 (p)$
PTF, $3 \nmid p$ $\Leftrightarrow 1^{p+1} \cdot 3^4 + 84 \equiv 0 (p)$
$\Rightarrow (3^{p-1}) \equiv 1 (p)$

$\Leftrightarrow 81 + 84 \equiv 0 (p)$
$\Leftrightarrow 165 \equiv 0 (p)$
$\Leftrightarrow 5 \cdot 3 \cdot 11 \equiv 0 (p)$
$\Leftrightarrow \boxed{p|5}$ o $p\cancel{|}3$ o $\boxed{p|11}$.
p primo

Pues $3 \nmid p$

$\Rightarrow$ p puede ser o 5 ⓞ 11.

Sigo Hoja ②

ZEVALLOS, DIEGO IGNACIO 2

Entonces de ① saco que $p \in \{3, 5, 11\}$.

Reemplazo en ② y descarto.

$\boxed{p=3}$

$\Rightarrow (7\cdot 3+8)^{2024} \equiv 4\,(3)$

$\Leftrightarrow (21+8)^{2024} \equiv 1\,(3)$

$\Leftrightarrow (29)^{2024} \equiv 1\,(3)$

$\Leftrightarrow (29)^{0} \equiv 1\,(3)$

PTF $29 \perp 3$

$\Leftrightarrow \boxed{1 \equiv 1\,(3)}$

$\Rightarrow 29^{2024} \underset{(3)}{\equiv} 29^{r_2(2024)} \underset{(3)}{\equiv} 29^{0}$

P=3 sirve.

$\boxed{p=5}$

$\Rightarrow (7\cdot 5+8)^{2024} \equiv 4\,(5)$

$\Leftrightarrow (43)^{2024} \equiv 4\,(5)$

$\Leftrightarrow (43)^{0} \equiv 4\,(5)$

$43 \perp 5$ PTF

$\underline{1 \equiv 4\,(5)}$ ¡ABS! $\Rightarrow \boxed{p \neq 5}$

$43^{2024} \underset{(5)}{\equiv} 43^{r_4(2024)} \underset{(5)}{\equiv} 43^{0}$

$\boxed{p=11} \Rightarrow (7\cdot 11+8)^{2024} \equiv 4\,(11)$

$\Leftrightarrow (85)^{2024} \equiv 4\,(11)$

$\Leftrightarrow 8^{4} \equiv 4\,(11) \Leftrightarrow \boxed{4 \equiv 4\,(11)} \Rightarrow$ ¡$\boxed{p=11}$ sirve!

PTF

$85^{2024} \underset{(11)}{\equiv} 85^{r_{10}(2024)} \underset{(11)}{\equiv} 85^{4} \equiv 8^{4}\,(11)$

$\therefore$ Rta: Los $p \in \mathbb{N}$ primos que verifican lo pedido son los $p \in \{3, 11\}$.

③ $(f_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}[x]$.

$f_1 = x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 11x^2 - 20 \quad \wedge \quad f_{n+1} = (x+2)^2 f_n' + 3 f_n \quad , n \in \mathbb{N}.$

$p(n)$: "$\text{mult}(-2; f_n) = 2$" $n \in \mathbb{N}$! q.p.q $p(n)$ es verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$. Uso inducción.

① CASO BASE. ¿$p(1)$ V?

Se que como $f_1 \in \mathbb{R}[x]$, $\text{mult}(-2, f_1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(-2) = 0 \\ f_1'(-2) = 0 \\ f''(-2) \neq 0 \end{cases}$

$f_1 = x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 11x^2 - 20$

$f_1(-2) = -32 + 3\cdot 16 - 5\cdot 8 + 11\cdot 4 - 20 = \underline{0} \Rightarrow \text{mult}(-2, f_1) \geq 1.$

$f_1' = 5x^4 + 12x^3 + 15x^2 + 22x$

$f_1'(-2) = 5\cdot 16 - 12\cdot 8 + 15\cdot 4 - 22\cdot 2 = \underline{0} \Rightarrow \text{mult}(-2, f_1) \geq 2.$

$f_1'' = 20X^3 + 36X^2 + 30X + 22.$

$f_1''(-2) = -20 \cdot 8 + 36 \cdot 4 - 30 \cdot 2 + 22 = -54 \neq 0 \Rightarrow mult(\cancel{-2}, f_1) = 2.$

$\boxed{\therefore P(1) V}$

② PASO INDUCTIVO. Sea $h \in \mathbb{N}$. Supongo $P(h)$ V, es decir,

(HI) Vale que $mult(-2, f_h) = 2$.

Veo si $P(h+1)$ V.

$f_{h+1} = (X+2)^2 f_h' + 3 f_h.$

$f_{h+1}(-2) = \underbrace{(-2+2)^2}_{=0} \cdot \underbrace{\underbrace{f_h'(-2)}_{=0} + 3\underbrace{f_h(-2)}_{=0}}_{HI} = 0 \Rightarrow mult(-2, f_{h+1}) \geq 1.$

$f_{h+1}' = 2(X+2) \cdot f_h' + (X+2)^2 f_h'' + 3 f_h'.$

$f_{h+1}'(-2) = \underbrace{2(-2+2) \underbrace{f_h'(-2)}_{=0 \; HI}}_{=0} + \underbrace{(-2+2)^2}_{=0} \underbrace{f_h''(-2)}_{\neq 0 \; HI} + 3 \underbrace{f_h'(-2)}_{=0 \; HI} = 0 \Rightarrow mult(-2, f_{h+1}) \geq 2.$

$\cancel{f_{h+1}'' = 2(f_h' + (X+2) f}$

$f_{h+1}'' = 2\left(f_h' + (X+2) f_h''\right) + \left(2(X+2) f_h'' + (X+2)^2 f_h'''\right) + 3 f_h''$

$f_{h+1}''(-2) = \underbrace{2\left(\overbrace{f_h'(-2)}^{=0} + \overbrace{(-2+2)}^{=0} f_h''(-2)\right)}_{=0} + \underbrace{\left(2\underbrace{(-2+2)}_{=0} f_h''(-2) + \underbrace{(-2+2)^2}_{=0} f_h'''(-2)\right)}_{=0} + 3 f_h''(-2) =$

$= 3 f_h''(-2)$ Pero, por HI, $f_h''(-2) \neq 0 \Rightarrow 3 f_h''(-2) \neq 0$

$\boxed{\Rightarrow mult(-2, f_{h+1}) = 2}$

Luego, $P(h+1)$ V.

$\boxed{\therefore \text{Mediante inducción, probé que } mult(-2, f_n) = 2, \forall n \in \mathbb{N}.}$

¡Muy bien escrito!

4) $f = x^5 + \frac{n}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{11}{3}x^2 - x.$

$\Rightarrow f = x\underbrace{\left(x^4 + \frac{n}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{11}{3}x - 1\right)}_{g}$

sé que g comparte raíces con $h = 3g \in \mathbb{Z}[x]$, hallo raíces racionales de h usando GAUSS.

$h = 3x^4 + nx^3 - 8x^2 + 11x - 3$ ~~si $\exists \alpha \in \mathbb{Q}$ t.q $h(\alpha) = 0$,~~

$\Rightarrow$ si $\exists \alpha \in \mathbb{Q}$ t.q $h(\alpha) = 0$, $\Rightarrow \alpha \in \frac{D.v(-3)}{D.v(3)} = \frac{\{\pm 1, \pm 3\}}{\{\pm 1, \pm 3\}} = \{\pm 1, \pm \frac{1}{3}, \pm 3\}$

Como quiero buscar n t.q $h(\alpha) = 0$, con $\alpha \in \mathbb{Z}$, entonces me quedo con ± 1 y ± 3.

$\Rightarrow h(1) = 0 \Leftrightarrow \cancel{3} + n - 8 + 11 \cancel{- 3} = 0$

$\Leftrightarrow n = -11 + 8$

$\Leftrightarrow \boxed{n = -3}$ pero $n \notin \mathbb{N}$.

$\Rightarrow h(-1) = 3\cdot(-1)^4 + n(-1)^3 - 8(-1)^2 + 11(-1) - 3$

$= \cancel{3} - n - 8 - 11 \cancel{- 3}$

$= -n - 8 - 11 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{n = -19} \notin \mathbb{N}$.

$\cdot\, h(3) = 3\cdot 3^4 + n(3)^3 - 8\, 3^2 + 11\cdot 3 - 3$

$= 243 + 27n - 72 + 33 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 27n + 201 = 0$

$\Leftrightarrow 27n = -201$

$\boxed{n = -\frac{67}{9}} \notin \mathbb{N}$.

$\cdot\, h(-3) = 3(-3)^4 - n(3^3) - 8\cdot(-3)^2 - 11\cdot 3 - 3$

$= 243 - 27n - 72 - 33 - 3$

$= 135 - 27n = 0$

$\Leftrightarrow \frac{135}{27} = \frac{27n}{27}$

$\Leftrightarrow \boxed{5 = n} \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ el único n que verifica es $\boxed{n = 5}$

b) $f = x^5 + \frac{5}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{11}{3}x^2 - x$

$f = x\underbrace{\left(x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{11}{3}x - 1\right)}_{g}$

se que, por el punto anterior, $x+3 \mid f$, pues -3 es raíz de f. $\Rightarrow$ hago la división.

como $x \perp x+3 \Rightarrow x+3 \mid g$.

$$\begin{array}{l|l} x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{11}{3}x - 1 & x+3 \\ \hline -(x^4 + 3x^3) & x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} \\ \quad -\frac{4}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{11}{3}x - 1 & \\ \quad -(-\frac{4}{3}x^3 - 4x^2) & \\ \qquad \frac{4}{3}x^2 + \frac{11}{3}x - 1 & \\ \qquad -(\frac{4}{3}x^2 + 4x) & \\ \qquad\quad -\frac{1}{3}x - 1 & \\ \qquad\quad (-\frac{1}{3}x - 1) & \\ \qquad\qquad \boxed{0} & \end{array}$$

$\Rightarrow f = x(x+3)\underbrace{\left(x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)}_{h'}$

• Se que en h', al ser un polinomio en $\mathbb{R}[x]$, existe al menos una raíz y comparte con $3h'$. bién! (llamarlo h' no es buena idea por notación de derivada ...)

$3h' = 3x^3 - 4x^2 + 4x - 1$. Busco raíces racionales.

$\exists \beta \in \mathbb{Q}$ t.q $3h'(\beta) = 0 \Rightarrow \beta \in \frac{Div(-1)}{Div(3)} = \frac{\{\pm 1\}}{\{\pm 1, \pm 3\}} = \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{3}\right\}$

Veo que $\frac{1}{3}$ es raíz de $3h' \Rightarrow \underbrace{x - \frac{1}{3} \mid h'}$.

hago la división.

$$\begin{array}{l|l} x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} & x - \frac{1}{3} \\ \hline -(x^3 - \frac{1}{3}x^2) & x^2 - x + 1 \\ \quad -x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} & \\ \quad -(-x^2 + \frac{1}{3}x) & \\ \qquad x - \frac{1}{3} & \\ \qquad -(x - \frac{1}{3}) & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow f = x(x+3)(x-\frac{1}{3})\underbrace{(x^2 - x + 1)}_{g'}$

Busco las raíces de g'.

hoja ④

$g' = x^2 - x + 1$. Uso el crit. del discriminante.

$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0 \Rightarrow$ g' tiene raíces complejas no reales

Las busco.

$\gamma_{+,-} = \dfrac{1+w}{2}$, $w^2 = \Delta = -3 \Rightarrow w = \pm\sqrt{3}\,i$

$\boxed{\gamma_{+,-} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i}$ son las raíces de f complejas.

Ahora factorizo.

- en $\mathbb{C}[x]$:

$f = \underbrace{x(x+3)(x-\tfrac{1}{3})\left(x-\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x-\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)}_{\text{Pols mónicos de gr 1, irreducibles.}}$ es la factorización de f en $\mathbb{C}[x]$, pues

- en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{Q}[x]$:

$f = \underbrace{x(x+3)(x-\tfrac{1}{3})}_{\text{Pols mónicos de gr 1, irreducibles}}(x^2-x+1)$ es la factorización de f en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{Q}[x]$, pues

Pol de gr 2, mónico. Sin raíces en $\mathbb{Q}$ ni en $\mathbb{R}$. $\Rightarrow$ irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{R}[x]$