FINAL DE ÁLGEBRA I
(04-03-24)

N. I.
(nibanez123@gmail.com)

"Para que nada nos amarre
que no nos una nada."
Pablo Neruda

Ejercicio 1

Se define por recurrencia la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera:

$$a_1 = 4, \quad a_2 = 5 \;\; y \;\; a_{n+2} = a_{n+1} - 10a_n \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n \equiv 4^n \pmod{11}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y calcular el resto de la división por 11 de $\sum_{n=1}^{2024} a_n$.

Resolución:

Usamos inducción. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, la afirmación dada por

$$P(n): \quad a_n \equiv 4^n \pmod{11}.$$

Veamos que vale $P(n)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 1$ resulta $a_1 = 4 \equiv 4^1 \pmod{11}$.

Si $n = 2$ resulta $a_2 = 5 \equiv 4^2 \pmod{11}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos verdaderas $P(n)$ y $P(n+1)$ y veamos que lo es $P(n+2)$. La afirmación $P(n+2)$ es verdadera si y sólo si $a_{n+2} \equiv 4^{n+2}$ $\pmod{11}$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} a_{n+2} = a_{n+1} - 10a_n &\equiv 4^{n+1} - 10 \cdot 4^n \\ &\equiv (4-10)4^n \\ &\equiv -6 \cdot 4^n \\ &\equiv 16 \cdot 4^n \\ &\equiv 4^{n+2} \pmod{11}. \end{aligned}$$

Probados los casos base y el paso inductivo, se concluye que $P(n)$ es verdadera $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Calculemos ahora el resto de la división por 11 de $\sum_{n=1}^{2024} a_n$.

Tenemos que

$$\sum_{n=1}^{2024} a_n \equiv \sum_{n=1}^{2024} 4^n \equiv \sum_{n=1}^{2024} 4^{r_{10}(n)} \pmod{11},$$

donde usamos el PTF pues 11 es primo y $(4:11) = 1$.

Ahora debemos contar, para cada $k \in \{0, 1, ..., 9\}$, la cantidad de números naturales n entre 1 y 2024 tales que $r_{10}(n) = k$. Para eso escribimos a n como $n = 10j + k$ con $j \in \mathbb{Z}$. Luego, analizando cada caso, resulta $1 \leq j \leq 202$ si $k = 0$, $0 \leq j \leq 202$ si $k = 1, 2, 3$ o 4, y $0 \leq j \leq 201$ si $k = 5, 6, 7, 8$ o 9. Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2024} 4^{r_{10}(n)} &\equiv 202(4^0 + 4^5 + 4^6 + 4^7 + 4^8 + 4^9) + 203(4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4) \\ &\equiv 0 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Se concluye así que

$$r_{11}\left(\sum_{n=1}^{2024} a_n\right) = 0.$$

$\blacksquare$

Ejercicio 2

a) Enunciar la definición de divisibilidad para enteros y determinar si la relación $\Re$ sobre $\mathbb{Z}$ dada por

$$a \,\Re\, b \;\text{ si y sólo si }\; a \mid b \;\text{ para todos } a, b \in \mathbb{Z} \text{ con } a \neq 0,$$

es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

b) Calcular el cardinal del conjunto

$$\{a \in \mathbb{Z} : \ a \, \Re \, 14580000 \ \text{ y } \ a \equiv 0 \pmod{15}\}.$$

Resolución:

a) Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0$, se dice que a divide a b o que b es divisible por a si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ka$, y se representa $a \mid b$.

Para la relación $\Re$ tenemos que:

$\Re$ es reflexiva, pues si $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$ resulta $a \mid a$.

$\Re$ no es simétrica, pues $1 \mid 2$ pero $2 \nmid 1$.

$\Re$ no es antisimétrica, pues $-1 \mid 1$ y $1 \mid -1$ pero $-1 \neq 1$.

$\Re$ es transitiva, pues si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0 \neq b$ son tales que $a \mid b$ y $b \mid c$, existen $j, k \in \mathbb{Z}$ tales que $b = ja$ y $c = kb$, lo que implica que $c = kja$.

b) Sea $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Luego, $a \, \Re \, 14580000$ y $a \equiv 0 \pmod{15}$ si y sólo si a es divisor de 14580000 y a es divisible por 15.

Como $14580000 = 2^5 3^6 5^4$ y $15 = 3 \cdot 5$, debe ser $a = \pm 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$, con $0 \leq \alpha \leq 5$, $1 \leq \beta \leq 6$ y $1 \leq \gamma \leq 4$. Luego,

$$\#\{a \in \mathbb{Z} : \ a \, \Re \, 14580000 \ \text{ y } \ a \equiv 0 \pmod{15}\} = 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 = 288.$$

■

Ejercicio 3

Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + 15aX^4 + 12bX^3 - 18X^2 - 1$$

tiene al menos una raíz racional. Probar que esta raíz es la única raíz racional de f y que además es simple.

Resolución:

Por el Lema de Gauss, en caso de tener f raíces racionales, estarían en $\{-1, 1\}$. Luego,

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^5 + 15a(-1)^4 + 12b(-1)^3 - 18(-1)^2 - 1 \\ &= -1 + 15a - 12b - 18 - 1 = 15a - 12b - 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^5 + 15a1^4 + 12b1^3 - 18 \cdot 1^2 - 1 \\ &= 1 + 15a + 12b - 18 - 1 = 15a + 12b - 18 \end{aligned}$$

, y por lo tanto, $f(-1) = 0 \iff 15a - 12b = 20$, y $f(1) = 0 \iff 15a + 12b = 18$.

Resolvemos las ecuaciones diofánticas:

• $15a - 12b = 20$: tal ecuación no tiene solución pues $(15 : -12) = 3$ no divide a 20.

• $15a + 12b = 18$:

$$15a + 12b = 18 \iff 5a + 4b = 6,$$

que tiene como solución particular a (2, -1). Luego, el conjunto de soluciones de tal que ecuación es

$$S := \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a = 2 - 4k,\ b = -1 + 5k,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Se concluye entonces que todos los pares $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ para los cuales f tiene al menos una raíz racional son los elementos de S, y de hecho tal raíz es el 1 y es única.

Veamos ahora que si $(a, b) \in S$, 1 es raíz simple de f.

Sea $k \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$\begin{aligned} f' &= 5X^4 + 60aX^3 + 36bX^2 - 36X \\ &= 5X^4 + 60(2 - 4k)X^3 + 36(-1 + 5k)X^2 - 36X, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} f'(1) &= 5 \cdot 1^4 + 60(2 - 4k)1^3 + 36(-1 + 5k)1^2 - 36 \cdot 1 \\ &= 5 + 120 - 240k - 36 + 180k - 36 \\ &= 53 - 60k \neq 0, \end{aligned}$$

que implica que 1 es raíz simple de f.

■

Ejercicio 4

Hallar $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$ de forma tal que el polinomio $f \in \mathbb{C}[X]$ dado por

$$f = X^5 - (4i-4)X^4 - (16i+8)X^3 + (16i-11)X^2 - (20i-16)X - a$$

tenga una raíz entera. Para los valores de a hallados, dar la factorización de f en $\mathbb{C}[X]$ si además se sabe que $(f : X^6 - 1) \in \mathbb{Q}[X]$ y su grado es mayor que 1.

Resolución:

Sea $x_0 \in \mathbb{Z}$ raíz de f. Luego,

$$\begin{aligned}0 &= f(x_0)\\ &= x_0^5 - (4i-4)x_0^4 - (16i+8)x_0^3 + (16i-11)x_0^2 - (20i-16)x_0 - a\\ &= (x_0^5 + 4x_0^4 - 8x_0^3 - 11x_0^2 + 16x_0 - a) +\\ &\quad + i(-4x_0^4 - 16x_0^3 + 16x_0^2 - 20x_0),\end{aligned}$$

lo que implica que

$$x_0^5 + 4x_0^4 - 8x_0^3 - 11x_0^2 + 16x_0 - a = 0$$

y

$$-4x_0^4 - 16x_0^3 + 16x_0^2 - 20x_0 = 0.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}0 &= -4x_0^4 - 16x_0^3 + 16x_0^2 - 20x_0\\ &= -4x_0(x_0^3 + 4x_0^2 - 4x_0 + 5),\end{aligned}$$

que implica $x_0 = 0$ o $x_0^3 + 4x_0^2 - 4x_0 + 5 = 0$, donde descartamos la primera posibilidad pues si $x_0 = 0$ resulta $a = 0$. Entonces, como x_0 es raíz entera de $X^3 + 4X^2 - 4X + 5$, por el Lema de Gauss debe ser $x_0 \in \{-5, -1, 1, 5\}$, de donde se deduce que $x_0 = -5$. Luego, $(-5)^5 + 4(-5)^4 - 8(-5)^3 - 11(-5)^2 + 16(-5) - a = 0$ implica $a = 20$.

De lo anterior resulta

$$\begin{aligned}f &= X^5 - (4i-4)X^4 - (16i+8)X^3 + (16i-11)X^2 - (20i-16)X - 20\\ &= (X+5)(X^4 + (-1-4i)X^3 + (-3+4i)X^2 + (4-4i)X - 4)\end{aligned}$$

La última igualdad y la hipótesis sobre $(f : X^6 - 1)$ nos permiten afirmar que existe una raíz sexta de la unidad w tal que $f(w) = f(\bar{w}) = 0$. Factorizando $X^6 - 1$ como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$ se obtiene

$$X^6 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1),$$

y haciendo los cálculos correspondientes se llega a que $X^2 - X + 1 \mid f$, y luego

$$f = (X + 5)(X^2 - X + 1)(X^2 - 4iX - 4).$$

Entonces, la factorización de f en $\mathbb{C}[X]$ es

$$f = (X + 5)\left(X - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(X - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)(X - 2i)^2.$$

■