Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Primer Parcial (5/10/2024) - 2do. Cuatrimestre 2024

TEMA 4

1	2	3	4	Nota
B-	B	R+	B	8,5

Apellido: FILIPPO Nro. de libreta: Nro de práctica: 4

Nombre: AGUSTINA Carrera: CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN.

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2 + 4y$ y el punto $P = (2, 2)$.

   a) Parametrizar y graficar la curva de nivel de f que pasa por el punto P.

   b) Parametrizar la intersección del gráfico de f con el plano $z = 16$ y dar una ecuación de la recta tangente de dicha curva en el punto $(2, 2, f(2, 2))$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^k}{x^6 + y^6} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$ para $k = 3$ y $k = 6$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|y(x^2 + y^2)}{x^6 + |y|^3} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Hallar, si existe, la expresión de $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ para cada $v = (a, b)$, $||v|| = 1$.

   b) Analizar la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que su plano tangente en $(1, 1, f(1, 1))$ es

$$6x + 3y - 3z = 0,$$

   y sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = f\left(\cos(2x + 3y - 3) + x, e^{xy+x+y-1}\right)$. Hallar el plano tangente a h en $(0, 1, h(0, 1))$.

Escribir todos los razonamientos que justifican las respuestas.

(3) (b) Busco la intersección, así que igualo.

$16 = 16 - x^2 - y^2 + 4y$

$0 = -x^2 - y^2 + 4y$

Multiplico por -1 en ambos lados.

$0 = x^2 + y^2 + 4y$

Completo cuadrados

$0 = x^2 + (y^2 - 4y + 4) - 4$

$\underbrace{4 = x^2 + (y-2)^2}$

Cilindro de radio 2 y centro $(0,2)$

Entonces

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y - 2 = 2\sin t \Longleftrightarrow y = 2\sin t + 2 \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

No grafica

$z = 16.$

La parametrización es

$$\boxed{\gamma(t) = (2\cos(t), 2\sin(t) + 2, 16)}$$

La recta tangente a la curva en el $(2, 2, f(2,2))$ es de la forma

$L(x,y) = \lambda(\gamma'(t_0)) + \gamma(t_0)$

$f(2,2) = 16 - 2^2 - 2^2 + 4 \cdot 2 = 16.$

Busco el t_0 para el cual vale que $\gamma(t_0) = (2, 2, 16)$

$$\begin{cases} 2\cos(t_0) = 2 & (1) \\ 2\sin(t_0) + 2 = 2 & (2) \\ 16 = 16 & (3) \end{cases}$$

(1) $2\cos(t_0) = 2$

$\cos(t_0) = 1$

$t_0 = \arccos(1)$

$t_0 = 0.$

Derivo $\gamma(t)$

$\gamma'(t) = (-2\operatorname{sen}(t), 2\cos(t), 0)$

$\gamma'(t_0) = \gamma'(0) = (-2\operatorname{sen}(0), 2\cos(0), 0) = (0,2,0)$

$\Rightarrow \boxed{L(x,y) = \lambda(0,2,0) + (2,2,16).}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

Escaneado con CamScanner

② Estudiemos la continuidad de f para $k=3$:

Tenemos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy)^3}{x^6+y^6} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\overbrace{x^3y^3}^{\to 0}}{\underbrace{x^6+y^6}_{\to 0}} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}.$$

Veo los límites iterados.

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\cdot 0^3}{x^6+0^6} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^6} = 0.$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0^3y^3}{0^6+y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^6} = 0.$$

Como ambos límites existen y dan cero, esto quiere decir que, si existe, el límite valdrá cero.

Veo qué sucede si tomo la curva $r(t)=(t,t) \xrightarrow[t\to 0]{} (0,0)$

$$\lim_{t\to 0} f(r(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3\cdot t^3}{t^6+t^6} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^6}}{2\cancel{t^6}} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Como $\frac{1}{2} \neq 0$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^6+y^6}$$

$\Rightarrow$ Cuando $k=3$, f no es continua en $(0,0)$

Fuera del $(0,0)$, f es continua al ser multiplicación, suma y división de funciones continuas.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Para } k=3,\ f \text{ es continua en todo } \mathbb{R}^2-(0,0)}$

Estudiemos la continuidad de f para $k=6$:

Fuera del $(0,0)$, f es continua al ser multiplicación, suma y división de funciones continuas.

Luego.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy)^6}{x^6+y^6} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\overbrace{x^6\cdot y^6}^{\to 0}}{\underbrace{x^6+y^6}_{\to 0}} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}.$$

Veo los límites iterados:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^6\cdot 0^6}{x^6+0^6} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^6} = 0.$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0^6 \cdot y^6}{0^6+y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^6} = 0.$$

Como ambos límites existen y valen cero, en caso de que el límite exista, este valdrá cero.

Veo qué sucede si tomo la curva $r(t) = (t,t) \xrightarrow[t\to 0]{} (0,0)$

$$\lim_{t\to 0} f(r(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^6 \cdot t^6}{t^6+t^6} = \lim_{t\to 0} \frac{t^{12}}{2t^6} = \lim_{t\to 0} \frac{t^6}{2} = 0$$

Sospecho que el límite existe y vale cero, así que acoto la función para probarlo por sandwich.

$$\left|\frac{x^6 y^6}{x^6+y^6}\right| = \underbrace{\frac{|x^6|}{|x^6+y^6|}}_{\leq 1}|y^6| \leq |y^6| = |y|^6 \underbrace{\leq}_{|y| \leq \|(x,y)\|} \|(x,y)\|^6 = (\sqrt{x^2+y^2})^6 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Nos queda

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6 y^6}{x^6+y^6} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} (\sqrt{x^2+y^2})^6.$$

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6 y^6}{x^6+y^6} \leq 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6 y^6}{x^6+y^6} = 0.$$

Probamos que el límite existe y vale cero.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Para } k=6, f \text{ es continua en todo } \mathbb{R}^2}$

Escaneado con CamScanner

③ ⓐ Busquemos las derivadas direccionales para todo v de la forma (a,b), v unitario.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+ha,0+hb)-\overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(ha,hb)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cancel{h}}\cdot\frac{|ha|\cdot\cancel{h}b((ha)^2+(hb)^2)}{(ha)^6+|hb|^3}=\lim_{h\to 0}\frac{|ha|b(h^2a^2+h^2b^2)}{h^6a^6+|hb|^3}=$$

Tomo

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{ha\cdot b(h^2a^2+h^2b^2)}{h^6a^6+h^3b^3}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\cancel{h^3}ab(a^2+b^2)}{\cancel{h^3}(h^3a^6+b^3)}=\lim_{h\to 0^+}\frac{ab(a^2+b^2)}{\underbrace{h^3a^6}_{0}+b^3}=$$

$$=\frac{ab(a^2+b^2)}{b^3}.$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{-ha\cdot b\cdot(h^2a^2+h^2b^2)}{h^6a^6-h^3b^3}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\cancel{-h^3}ab(a^2+b^2)}{\cancel{-h^3}(-h^3a^6+b^3)}=\lim_{h\to 0^-}\frac{ab(a^2+b^2)}{\underbrace{-h^3a^6}_{0}+b^3}=$$

$$=\frac{ab(a^2+b^2)}{b^3}.$$

Como por derecha y por izquierda los límites dan lo mismo.

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{|ha|b(h^2a^2+h^2b^2)}{h^6a^6+|hb|^3}=\frac{ab(a^2+b^2)}{b^3}$$

Entonces, la expresión que buscamos está dada por

$$\left|\frac{ab(a^2+b^2)}{|b|^3}\right|$$ → faltan módulos, no considera $b=0$.

ⓑ Busco las derivadas parciales de f.

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-\overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{|h|\cdot 0\cdot(h^2+0^2)}{h^6+|0|^3}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h^7}=0.$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-\overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{|0|\cdot h(0^2+h^2)}{0^6+|h|^3}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h|h|^3}.$$

vemos que ambas derivadas parciales existen.

Escaneado con CamScanner

Ahora, quiero que el siguiente límite exista y valga cero.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-[f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y]}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{|x|y(x^2+y^2)}{x^6+|y|^3} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}(x^6+|y|^3)} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

Veo los límites iterados:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|0(x^2+0^2)}{\sqrt{x^2+0^2}(x^6+|0|^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{\sqrt{x^2}x^6} = 0.$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{|0|y(0^2+y^2)}{\sqrt{0^2+y^2}(0^6+|y|^3)} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{\sqrt{y^2}|y|^3} = 0.$$

Como ambos existen y valen cero, en caso de que el límite de la función exista, también valdrá cero.

Veo qué sucede si tomo la curva $r(t)=(t,t) \xrightarrow[t\to 0]{} (0,0)$

$$\lim_{t\to 0} f(r(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{|t|\cdot t(t^2+t^2)}{\sqrt{t^2+t^2}(t^6+|t|^3)} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|\cdot t(2t^2)}{\sqrt{2t^2}(t^6+|t|^3)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{|t|\cdot 2t^3}{\sqrt{2}\sqrt{t^2}(t^6+|t|^3)} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{|t|}\cdot 2t^3}{\sqrt{2}\cancel{|t|}(t^6+|t|^3)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2t^3}{\sqrt{2}(t^6+|t^3|)}$$

Tomo

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{2t^3}{\sqrt{2}(t^6+t^3)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2\cancel{t^3}}{\sqrt{2}\cancel{t^3}(t^3+1)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2}{\sqrt{2}(t^3+1)} = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{2t^3}{\sqrt{2}(t^6-t^3)} = \lim_{t\to 0^-} \frac{2\cancel{t^3}}{\sqrt{2}\cancel{t^3}(t^3-1)} = \lim_{t\to 0^-} \frac{2}{\sqrt{2}(t^3-1)} = \frac{-2}{\sqrt{2}}$$

Como $\frac{2}{\sqrt{2}} \neq -\frac{2}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}(x^6+|y|^3)}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ no es diferenciable en } (0,0)}$

Escaneado con CamScanner

(4) El plano tangente de f en $(1,1,f(1,1))$ es

$6x+3y-z=0$

$-3z=-6x-3y$

$z=\frac{-6x-3y}{-3}$

$z=2x+y$

De forma general, el plano tangente en el $(1,1,f(1,1))$ es de la forma

$z=f(x,y)+f_x(x,y)(x-1)+f_y(x,y)(y-1)$

Para tener $2x \Rightarrow f_x(1,1)=2$

Nos queda $2(x-1)=2x-2$

Para tener $y \Rightarrow f_y(1,1)=1$.

Nos queda $y-1$.

Hasta ahora tenemos:

$z=f(x,y)+2x-2+y-1$

$z=f(x,y)+2x+y-3$

Como en el plano dado $(z=2x+y)$ no hay término independiente

$\Rightarrow f(1,1)=3$

Juntando todo

$f(1,1)=3$

$f_x(1,1)=2$

$f_y(1,1)\ 1$.

Por otra parte, el plano tangente a h en el $(0,1,h(0,1))$ es de la forma

$z=h(0,1)+h_x(0,1)\,x+h_y(0,1)(y-1)$

Entonces

$h(0,1)=f(\cos(2\cdot 0+3\cdot 1-3)+0,e^{0\cdot 1+0+1-1})=f(1,1)=3$

Luego:

Escaneado con CamScanner

$$h_x(x,y) = f_x(x,y)(-2\,\text{sen}(2x+3y-3)+1) + f_x(x,y)((y+1)e^{xy+x+y-1})$$

$$h_x(0,1) = 2(-2\,\text{sen}(2\cdot 0+3\cdot 1-3)+1) + 2((1+1)e^{0\cdot 1+0+1-1})$$

$$= 2\cdot 1+2\cdot 2=4.$$

$$h_y(x,y) = f_y(x,y)(-3\,\text{sen}(2x+3y-3)) + f_y(x,y)((x+1)e^{xy+x+y-1})$$

$$h_y(0,1) = 1\cdot(-3\,\text{sen}(2\cdot 0+3\cdot 1-3)) + 1((0+1)e^{0\cdot 1+0+1-1})$$

$$= 1\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1$$

Entonces, el plano queda de la forma

$$z = 3+4x+y-1$$

$$\boxed{z = 2+4x+y}$$