1	2	3	4	Calificación
R^+/R^+	R	B	B^-	7

APELLIDO Y NOMBRE: Kruel Adoryan Magali ..... NO. DE LIBRETA: 1257/23

TURNO: [✓] A-K 11 a 14 hs [ ] L-Z 11 a 14 hs [ ] 16 a 19 hs [ ] 17 a 20 hs

CARRERA: Lic. ciencia de la Computación

Álgebra I

Segundo Cuatrimestre - Primer parcial - 21/10/2023

Ejercicio 1. Consideremos el conjunto $X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Sean $\mathcal{F} = \big\{f : X \to X \,/\, f \text{ es función}\big\}$ y $\mathcal{R}$ la relación en $\mathcal{F}$ definida por

$$f\,\mathcal{R}\,g \iff f(n) \leq g(n), \text{ para todo } n \in \{0,1,2,3,4,5\}.$$

a) Determinar si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, simétrica, transitiva y/o antisimétrica.

b) Sea $h \in \mathcal{F}$ la función definida como:

$$h(n) = r_3(n), \text{ para todo } n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}.$$

Es decir, h es la función que a cada n le asigna su resto en la división por 3.
Calcular el cardinal del conjunto

$$\{f \in \mathcal{F} \,/\, 8 \in \mathrm{Im}(f) \text{ y } f\,\mathcal{R}\,h\}.$$

Ejercicio 2. Probar que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{10k-5}{2k} > n\,3^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3. Sea $n \in \mathbb{N}$.

a) Probar que $5 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \iff n \equiv 1 \pmod{5}$.

b) Calcular $\big(81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 : 30\big)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4. Determinar todos los enteros positivos $n \leq 30000$ tales que $(n : 5184) = 1728$ y que tienen exactamente 56 divisores positivos.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas, no omita detalles, y sea claro al escribir.

Magalí Kruel

HOJA Nº

FECHA

①

2-

- $\mathcal{R}$ será reflexiva si: $\forall f \in F$, $f\mathcal{R}f$. Esto sucederá si $f(n) \leq f(n)$ para todo $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Al tratarse del mismo f, observo que $f(n) = f(n)$ siempre, por lo que $f\mathcal{R}f \Rightarrow$ es reflexiva. ✓

- $\mathcal{R}$ será simétrica si $f\mathcal{R}g$ y $g\mathcal{R}f$ para $g \neq f$, $g \in F$, $f \in F$. Observo que si $f\mathcal{R}g$, $f(n) \leq g(n)$ $\forall n \in \{0,1,2,3,4,5\}$, por lo que nunca, para esos valores de n, va a suceder que $g(n) < f(n)$. Entonces $g\not\mathcal{R}f$ si $f\mathcal{R}g \Rightarrow$ No es simétrica.

OJO, sí puede ser que $f(n) \leq g(n)$ y $g(n) \leq f(n)$, cuando $f(n) = g(n)$!

- $\mathcal{R}$ será antisimétrica si: $f\mathcal{R}g$ y $g\mathcal{R}f \Leftrightarrow g = f$. Con un ejemplo se puede ver que esto falla, ya que si $f(n) = n$ y $g(n)$ se define como: $g(0)=0$, $g(1)=1$, $g(2)=2$, $g(3)=3$, $g(4)=4$, $g(5)=5$, $g(6)=6$, $g(7)=8$ y $g(8)=7$, para los $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$, $f(n) = g(n)$, por lo que $f(n) \leq g(n) \Rightarrow f\mathcal{R}g$ y $g(n) \leq f(n) \Rightarrow g\mathcal{R}f$, pero $g \neq f \Rightarrow$ No es antisimétrica. ✓

- $\mathcal{R}$ será transitiva si: $f\mathcal{R}g$ y $g\mathcal{R}h \Rightarrow f\mathcal{R}h$. Notemos que si $f\mathcal{R}g$, $f(n) \leq g(n)$ y si $g\mathcal{R}h$, $g(n) \leq h(n)$ para los mismos valores de n. Esto significa que $f(n) \leq g(n) \leq h(n) \Leftrightarrow f(n) \leq h(n) \Leftrightarrow f\mathcal{R}h \Rightarrow$ es transitiva.

Rta: $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva y transitiva. ✓

6-

Veo primero cómo está definida h =

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
h(n)	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Como $f\mathcal{R}h$, $f(n) \leq h(n)$ $\forall n \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Las opciones que tengo para definir $f(n)$ con $0 \leq n \leq 5$ son:

$f(0)=0 \rightarrow 1$ opción
$f(1)=0$ o $f(1)=1 \rightarrow 2$ opciones
$f(2)=0$ o $=1$ o $=2 \rightarrow 3$ opciones
$f(3)=0 \rightarrow 1$ opción
$f(4)=0$ o $=1$ $\rightarrow 2$ opciones
$f(5)=0$ o $=1$ o $=2 \rightarrow 3$ opciones

en todos estos casos resulta que $f(n) \leq h(n)$, entonces $f\mathcal{R}h$.
Tengo en total $= 1.2.3.1.2.3 = 3!.3! = 36$ opciones ✓

NOTA

para el resto de la función ($f(6), f(7), f(8)$), la única condición a cumplir es que uno de ellos sea asignado al 8, así $8 \in Imf$. Eso es como "agarrar" un elemento entre $f(6)$, $f(7)$ y $f(8)$ y asignarle el 8 $\Rightarrow \binom{3}{1}$ opciones.

Como tome una de las 3 funciones, para el resto tengo 9 opciones donde asignarlas ya que el Codominio de f tiene 9 elementos $\Rightarrow 9^2$ opciones.

Rta: el cardinal del conjunto $\{f \in F \,/\, 8 \in Imf \text{ y } fRh\} = 36 \cdot \binom{3}{1} \cdot 9^2 = 8748$

Acá, si una función manda más de un n al 8 (que puede pasar) lo estás contando más de una vez

Magali Kruel

HOJA Nº

FECHA

(2) Voy a probarlo por inducción simple:

Caso Base: $p(1)$ es verdadera $\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{1} \frac{10k-5}{2\cdot k} > 1.3^{1-1} \Leftrightarrow \frac{5}{2} > 1$, que es cierto, y como todas mis relaciones se conectan con $\Leftrightarrow$, $p(1)$ es V.

Hipótesis Inductiva: $p(h)$ es verdadera para $p(h): \prod_{k=1}^{h} \frac{10k-5}{2k} > h.3^{h-1}$

- Paso Inductivo: quiero ver que $p(h) \Rightarrow p(h+1)$ para $p(h+1): \prod_{k=1}^{h+1} \frac{10k-5}{2k} > (h+1).3^{h}$ $\forall h \in \mathbb{N}$

$$\prod_{k=1}^{h+1} \frac{10k-5}{2k} = \prod_{k=1}^{h} \frac{10k-5}{2k} \cdot \frac{10.(h+1)-5}{2.(h+1)} \overset{\text{Por (HI)}}{\Longleftrightarrow} \prod_{k=1}^{h} \frac{10k-5}{2k} \cdot \frac{10(h+1)-5}{2.(h+1)} > h.3^{h-1} . \frac{10(h+1)-5}{2.(h+1)}$$

Basta con ver que $h.3^{h-1} . \frac{10(h+1)-5}{2.(h+1)} > (h+1).3^{h} \Leftrightarrow h.3^{h}.\frac{1}{3}.\frac{10(h+1)-5}{2(h+1)}.\frac{1}{3^{h}} > (h+1).3^{h}.\frac{1}{3^{h}}$

$$\Leftrightarrow \frac{h.(10h+5)}{3.(2h+2)} > (h+1)^{2} \Leftrightarrow 10h^2+5h > 6h^2+12h+6 \Leftrightarrow \underbrace{4h^2 > 7h+6}$$

Lo pruebo por P.I.S.

Te quedó algo más fácil

Principio de inducción para probar $4h^2 > 7h+6$ $\forall h \in \mathbb{N}_{\geq 3}$

Caso Base: $P(3)$ es verdadera $\Leftrightarrow 4.3^{2} > 7.3+6 \Leftrightarrow 36 > 27$, que es verdadero, y como todas las partes están relacionadas con $\Leftrightarrow$, $p(3)$ es V.

(HI) $p(k)$: $4.k^2 > 7.k+6$ $\forall k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ es verdadera.

Paso Inductivo: qvq $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ para $p(k+1)$: $4.(k+1)^2 > 7.(k+1)+6$

$$4(k+1)^2 = 4.(k^2+2k+1) = 4k^2+8k+4 \overset{HI}{\Longleftrightarrow} 4k^2+8k+4 > 7k+6+8k+4$$

Basta con ver que $7k+6+8k+4 > 7(k+1)+6$

$$\Leftrightarrow 15k+10 > 7k+13 \Leftrightarrow 8k > 3$$ que es verdad $\forall k \in \mathbb{N}$.

Como todas las partes del paso inductivo están relacionadas con $\Leftrightarrow$ y llegamos a una verdad, luego Paso Inductivo queda probado, y habiendo probado el Caso Base, por el principio de inducción, $4h^2 > 7h+6$ $\forall h \in \mathbb{N}_{\geq 3}$

Volviendo: llegué a que $4h^2 > 7h+6$ es verdadero $\forall h \in \mathbb{N} / h \geq 3$. Como todas las partes están relacionadas con $\Leftrightarrow$, luego Paso Inductivo se cumple $\forall h \geq 3$. Voy a

NOTA

Probar a mano que p(1) y p(2) se cumplen:

p(1) está probado en Caso Base

p(2) es Verdadero $\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{2} \frac{10k-5}{2k} > 2.3^{2-1} \Leftrightarrow \frac{5}{2}\cdot\frac{15}{4} > 2.3 \Leftrightarrow \frac{75}{8} > 6$ que es

verdad, y por estar relacionados todas las partes con $\Leftrightarrow$, luego p(2) es V.

Queda probado que p(1) es V, p(2) es V y que $p(h) \Rightarrow p(h+1)$ $\forall h \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Luego, por el principio de inducción, $\prod_{k=1}^{n} \frac{10k-5}{2k} > n.3^{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

También tenés que ver que vale P(3)!

Si $p(h) \Rightarrow p(h+1)$ sólo para $h \geq 3$,

¿cómo sabés que vale P(3)?

Magali Kruel

HOJA Nº

FECHA

(3)

2- $81 \equiv 1\ (5) \Rightarrow 81^n \equiv 1^n \equiv 1\ (5)$

$45 \equiv 0\ (5)$

$11 \equiv 1\ (5) \Rightarrow 11.n^3 \equiv 1\ (5) \Leftrightarrow n \equiv 1\ (5)$

$22 \equiv 2\ (5) \Rightarrow 22n \equiv 2\ (5) \Leftrightarrow n \equiv 1\ (5)$

$33 \equiv 3\ (5) \Rightarrow 33n^2 \equiv 3 \Leftrightarrow n \equiv 1\ (5)$

Luego $81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv 1 - 0 - n^3 - 2n - 3n^2 \equiv -5 \equiv 0\ (5) \Leftrightarrow n \equiv 1\ (5)$

(Resueto despues del 3-b)

b- $(81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 : 30) = d$, entonces $d \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2$ y $d \mid 30$.

Luego $d \in Div_+(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ si $d \mid 30$. Veo cada caso:

Caso $d=2$:

Como $81 \equiv 1\ (2) \Rightarrow 81^n \equiv 1^n \equiv 1\ (2)$, $45 \equiv 1\ (2)$, $11 \equiv 1\ (2) \Rightarrow 11n^3 \equiv n^3\ (2)$,

$22 \equiv 0\ (2) \Rightarrow 22n \equiv 0\ (2)$ y $33 \equiv 1\ (2) \Rightarrow 33n^2 \equiv n^2\ (2)$,

luego $81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv \cancel{1-1} - n^3 - n^2 \equiv n^2(-n-1)\ (2)$. Si n fuera impar, n^2 es impar y $-n-1$ es par $\Rightarrow$ impar . par = par. Si n fuera par, n^2 es par y $-n-1$ es impar $\Rightarrow$ par . impar = par. Para todo n, $n^2(-n-1)$ = número par. Recuerdo que los números pares son de la forma $2.K$, por lo que siempre son divisibles por 2. Luego $n^2(-n-1) \equiv 0\ (2)$, y como $2 \mid 30$, $\boxed{d=2}$ es un posible MCD $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego $\boxed{d \neq 1}$.

Sólo tenías que ver si 2, 3 dividen a $81^n - 45$.... Eso ya te dice quién es d

Caso $d=3$:

Como $81 \equiv 0\ (3) \Rightarrow 81^n \equiv 0\ (3)$, $45 \equiv 0\ (3)$, $-11 \equiv 1\ (3) \Rightarrow -11n^3 \equiv n^3\ (3)$, $33 \equiv 0\ (3) \Rightarrow 33n^2 \equiv 0\ (3)$

y $22 \equiv 1\ (3) \Rightarrow 22n \equiv n\ (3)$

luego $81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv 0 + 0 + n^3 - n - 0 \equiv n(n^2-1)\ (3)$

Hago tabla de restos para ver qué valores de n cumplen esto:

n	0	1	2
$n(n^2-1)$	0	0	0

mód 3 $\Rightarrow n(n^2-1) \equiv 0\ (3)\ \forall n \in \mathbb{N}$

Por lo que $\boxed{d=3}$ es un posible MCD, y como $3 > 2 \rightarrow d \neq 2$.

NOTA

Caso $d=5$:

En el enunciado (2) se probó que $5 | 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \iff n \equiv 1\ (5)$

y como $5 | 30 \Rightarrow \boxed{d=5} \iff n \equiv 1\ (5)$

Para los siguientes casos, usaré la propiedad de: $c|a$ y $d|a$, y $(c:d)=1 \Rightarrow c.d|a$

Caso $d=6$:

$6 = 2.3$ y como $2 | 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2$ y $3 | 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2\ \forall n \in \mathbb{N}$

por lo que se demostró en caso $d=2$ y caso $d=3$, luego

$2.3 = 6 | 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2$ porque $(2:3)=1. \Rightarrow \boxed{d=6}\ \forall n \in \mathbb{N}$, y

como $6 > 3$, $\boxed{d \neq 3}$

!: voy a llamar Δ a $81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2$!

Caso $d=10$:

$10 = 2.5$ y como $(2:5)=1$ y $2|\Delta$ y $5|\Delta \iff n \equiv 1(5)$, luego

$\boxed{d=10} \iff n \equiv 1\ (5)$

Caso $d=15$:

$15 = 3.5$ y como $3|\Delta$, $5|\Delta \iff n \equiv 1(5)$ y $(3:5)=1 \Rightarrow 15|\Delta \iff n \equiv 1(5)$

$\boxed{d=15} \iff n \equiv 1\ (5)$, y como $15 > 10$, $\boxed{d \neq 10}$

Caso $d=30$:

$30 = 6.5$ y como $(5:6)=1$, $6|\Delta$ por lo demostrado en caso $d=6$

y $5|\Delta \iff n \equiv 1\ (5)$ $\underset{30|\Delta}{;}$, luego $\boxed{d=30} \iff n \equiv 1\ (5)$ y como $30 > 15$, $\boxed{d \neq 15}$

Rta: Si $n \equiv 1\ (5)$, $(81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 : 30) = 30$

En cualquier otro caso, $(81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 : 30) = 6$

B.n

(3)

a- Como: $81 \equiv 1\ (5) \Rightarrow 81^n \equiv 1^n \equiv 1\ (5)$, $45 \equiv 0\ (5)$, $11 \equiv 1\ (5) \Rightarrow 11n^3 \equiv n^3\ (5)$, $22 \equiv 2\ (5) \Rightarrow 22n \equiv 2n\ (5)$

y $33 \equiv 3\ (5) \Rightarrow 33n^2 \equiv 3n^2\ (5)$. Luego $81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv -n^3 - 2n - 3n^2 - 1\ (5)$

Con tabla de restos, veo cuándo $-n^3 - 3n^2 - 2n - 1 \equiv 0\ (5)$

n	0	1	2	3	4
n^2	0	1	4	4	1
n^3	0	1	3	2	4
$-n^3-3n^2-2n-1$	4	0	3	4	4

congruencias mod 5

↳ Se ve claramente que de la única forma que $81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv 0\ (5)$

es si $n \equiv 1\ (5)$

NOTA

Magdi Kruel

HOJA Nº

FECHA

(4)

El máximo común divisor entre 2 números ~~son~~ es la multiplicación de todos los primos compartidos elevados al menor exponente. Luego:

$(n:5184)=1728 \iff (n:2^6.3^4)=2^6.3^3$. Entonces $n=2^\alpha.3^3.p^\beta\ldots$ para $\alpha\geq 6$.

A la vez, me dicen que n tiene 56 divisores positivos. La cantidad de divisores de un número es igual a la multiplicación de cada exponente de los primos de su factorización más 1, por lo que

$\# Div_+(n) = (\alpha+1).\underbrace{(3+1)}_{2^2}.(\beta+1).(\ldots) = 56 = 2^3.7 = 2^2.2.7 = (3+1).2.7$

Al ser $\alpha\geq 6$, $(\alpha+1)\geq 2$, entonces el 7 perteneciente a la factorización del 56 corresponde al $\alpha+1$. $\Rightarrow \alpha+1=7 \Rightarrow \boxed{\alpha=6}$

¿No podría ser $\alpha+1=14$ y que no haya más primos?

Por último, $\beta+1$ corresponde al 2, por lo que $\boxed{\beta=1}$. No hay más exponentes ya que abarcamos todos los divisores. Luego $n=2^6.3^3.p$ tal que $p\in$ primos y $p\neq 2$ y $p\neq 3$.

Como busco los $n\leq 30000$, luego p tomará valores correspondientes a

$$\overbrace{2^6.3^3.p}^{n}\leq 30000$$

$$p\leq 17,36\ldots$$

y como p es primo, posibles $p=\{5,7,11,13,17\}$

Rta: todos los enteros positivos "n" que cumplen lo pedido son:

$n=2^6.3^3.5 = 8{,}640$

$n=2^6.3^3.7 = 12{,}096$

$n=2^6.3^3.11 = 19{,}008$

$n=2^6.3^3.13 = 22{,}464$

$n=2^6.3^3.17 = 29{,}376$

NOTA