A

1	2	3	4	Nota
B	R+	B-	R+	7,5

APELLIDO Y NOMBRE: [redacted] Samuel N° DE LIBRETA: [redacted]

CARRERA: Ciencias de la computación

TURNO: 9 a 14hs. A-K ☐ 9 a 14hs. L-Z ☐ 14 a 19hs. ☐ 17 a 22hs. ☒

Álgebra I

Primer Cuatrimestre 2024 - Primer Recuperatorio del **Segundo** parcial - 12/07/2024

Ejercicio 1. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que

$$300a + 22b = 344 \quad \text{y} \quad b \equiv 38 \pmod{42}.$$

Hallar el resto de dividir a a por 77.

Ejercicio 2. Determinar todos los primos positivos p tales que

$$p^3 \mid 35^p + 63^{p^2-1} + 13!\, p.$$

Ejercicio 3. Factorizar como producto de irreducibles mónicos en $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ el polinomio

$$f = X^4 + 4X^3 + 2X^2 + 2X + 2.$$

Ejercicio 4. Determinar un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo que satisfaga simultáneamente:

- f es mónico,
- $\operatorname{gr}(f : 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11) = 2$,
- f tiene una raíz $z \in G_3$ con $z \neq 1$, que es doble,
- $f(0) = 33$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.

Justifique todas sus respuestas.

12/07/2024

Reco del segundo parcial

① $\underbrace{300a+22b=344}_{Ⓔ} \wedge \underbrace{b\equiv 38\ (42)}_{Ⓡ}$.

~~$\Rightarrow$ Veo Ⓔ: $300a+22b=344 \iff 150a+11b=172 \iff$~~
~~Coprimizo por 2~~

~~$\iff 150a+11b=1$, veo a ojo que $a=-3 \wedge b=41$ es sol. part.~~
~~Uso Euclides~~

~~$\iff S=\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2 / a=-516+11k \wedge b=7052-150k\}$~~

$\Rightarrow$ Veo Ⓡ: $b\equiv 38\ (42) \iff \boxed{b=42k_1+38.}$, $\forall k_1\in\mathbb{Z}$.

~~$\Rightarrow$ Veo Ⓔ: $300a+22b=344 \iff 150a+11b=172 \iff$~~
~~Coprimizo por 2~~

~~$\iff 150a+11(42k_1+38)=172 \iff 150a+462k_1+418=172 \iff$~~
~~reemplazo a b~~

~~$\iff 150a+462k_1=-246 \iff 50a+154k_1=-82 \iff 50a+154k_1=1 \iff$~~
~~coprimizo por 3~~ ~~Uso Euclides~~

~~, pero a ojo veo que $k_1=364$ y $a=$~~

$\Rightarrow$ Veo Ⓔ: $300a+22b=344 \iff 300a+22(42k_1+38)=344 \iff$
reemplazo a b

$\iff 300a+924k_1=-492 \iff 150a+462k_1=-246 \iff 75a+231k_1=-123 \iff$
coprimizo por 2 ✓ coprimizo por 2 ✓

$\iff 25a+77k_1=-41$, a ojo veo que $k_1=13$ y $a=-40$ es sol. part. de $\rightarrow$
coprimizo por 3

~~$\iff S=\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2 / a=-40+77k \wedge k_1=13-25k\}$~~ $\rightarrow 25a+77k_1=1 \Rightarrow$ Ver reverso.
Euclides!

$\Rightarrow S = \{(a_{k_1}, b_{k_1}) \in \mathbb{Z}^2 / a = 1640 + 77k \wedge b_{k_1} = -533 - 25k\}, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Conclusión: $a = 77k + 1640$.

$\Rightarrow$ Veo $r_{77}(a)$: $a \equiv r\ (77) \Leftrightarrow 77k + 1640 \equiv r\ (77) \Leftrightarrow 0k + 23 \equiv r\ (77) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 23 \equiv r\ (77)$, como $0 \leq 23 < 77$, por Euclides $r_{77}(a) = 23$.

RTa

Bien

③ $f = x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 2x + 2$

$\Rightarrow$ Busco raíces con tabla de restos:

sea $\alpha \in \left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$

$\alpha \underset{(5)}{\equiv}$	0	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\alpha^4 + \bar{4}\alpha^3 + \bar{2}\alpha^2 + \bar{2}\alpha + \bar{2} \underset{(5)}{\equiv}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - \bar{3}) \mid f \Leftrightarrow f = (x - \bar{3})q$, hallo q con algo. de la div.: $\longrightarrow$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + \bar{4}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{2} & x - \bar{3} \\
\hline
-\ x^4 - \bar{3}x^3 & x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{1} \\
\quad \bar{2}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{2} & \\
-\ \bar{2}x^3 + \bar{4}x^2 & \\
\quad \bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{2} & \\
-\ \bar{3}x^2 + \bar{4}x & \\
\quad \bar{3}x + \bar{2} & \\
-\ \bar{3}x + \bar{2} & \\
\quad 0 &
\end{array}
$$

$f = (x - 3)(x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{1})$

Ver siguiente hoja.

$\Leftrightarrow f=(x-\bar{3})(\underbrace{x^3+\bar{2}x^2+\bar{3}x+\bar{1}}_{t})$.

$\Rightarrow$ Busco raíces de t en $\underbrace{(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})}_{\text{con Tabla de restos.}}$; Sea $\beta\in(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$

$\beta \underset{(5)}{\equiv}$	0	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\beta^3+\bar{2}\beta^2+\bar{3}\beta+\bar{1} \underset{(5)}{\equiv}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$

$\Leftrightarrow (x-\bar{3}) \mid t$. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=(x-\bar{3})m$, busco a "m" con algo. de la div.:

$$\begin{array}{l|l}
x^3+\bar{2}x^2+\bar{3}x+\bar{1} & x-\bar{3} \\ \hline
-\;x^3-\bar{3}x^2 & x^2+\bar{3} \\
\quad \bar{3}x+\bar{1} & \\
-\;\bar{3}x+\bar{1} & \\
\qquad \bar{0} &
\end{array}$$

$t=(x-\bar{3})(x^2+\bar{3})$. $\Leftrightarrow f=(x-\bar{3})^2(\underbrace{x^2+\bar{3}}_{r})$

· Viendo discriminante en el mismo cuerpo:

$\Rightarrow$ Busco raíces de r en $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$

$\Delta^2=0-\bar{4}\cdot 1\cdot(\bar{3})=-\bar{12}=\bar{3}$ $\Rightarrow$ Veo si $\bar{3}$ es un cuadrado en $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$: $\bar{3}\underset{(5)}{\equiv}\bar{3}$, y $\bar{3}^2\underset{(5)}{\equiv}\bar{9}\equiv 4(5)$.

Por qué decís que si $\bar{3}$ es un cuadrado, ent. $\bar{3}=\bar{3}^2$? Podría ser el cuadrado de otro número!

Conclusión: r es irred. en $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, pues $\bar{3}$ no es un cuadrado en $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Rta: La Factorización de f en $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ es $f=(x-\bar{3})^2(x^2+\bar{3})$, pues son todos Factores de polinomios mónicos irreducibles en $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, es decir, polinomios mónicos sin raíces en $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

B−

② $p \in \mathbb{N}$, p primo / $p^3 \mid \underbrace{\underbrace{35^p + 63^{p^2-1} + 13!\,p}_{r}}_{t}$

$\Rightarrow$ Veo (t): $p^3 \mid r \underset{p \text{ primo}}{\Rightarrow} p \mid r \Leftrightarrow 35^p + 63^{p^2-1} + 13!\,p \equiv 0\,(p) \Leftrightarrow$

No es necesario

$\Leftrightarrow 35^p + 63^{p^2-1} \equiv 0\,(p)$; asumo $p \nmid 35 \wedge p \nmid 63$, veo qué pasa y luego veo a mano qué pasa si $p \mid 35 \,\underline{\vee}\, p \mid 63$:

Es un $\underline{\vee}$ y no un $\vee$ porque $35 \perp 63$.

$\Leftrightarrow p \equiv 1\,(p-1) \Leftrightarrow 35 + 63^{p^2-1} \equiv 0\,(p) \Leftrightarrow p^2 - 1 \equiv r\,(p-1) \Leftrightarrow$

$p \perp 35$, p primo: P.T.F

Porque $\forall\, K \in \mathbb{Z}$: $K \equiv 1\,(K-1)$, pues $K-1$ es el anterior a K.

$p \perp 63$, p primo: P.T.F

$35^p \equiv 35\,(p)$

no importa si $p \mid 35$ ó no

$\Leftrightarrow 0 \equiv r\,(p-1)$, pues $p^2 \equiv 1\,(p-1) \wedge 1$ no es primo. $\Leftrightarrow 1 - 1 \equiv 0\,(p-1)$. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 35 + 63^0 \equiv 0\,(p) \Leftrightarrow 36 \equiv 0\,(p) \Leftrightarrow p = 2 \,\underline{\vee}\, p = 3$ ✓

(Pero $3 \mid 63$! O sea lo excluiste)

$\Rightarrow$ Veo qué pasa para cada valor de p hallado:

- $p = 2$: $2^3 \mid r \Leftrightarrow 35^2 + 63^{2^2-1} + 13!\,2 \equiv 0\,(8) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 1225 + 250047 + 0 \equiv 0\,(8) \Leftrightarrow 0 + 0 \equiv 0\,(8)$,

  $p = 2$ me sirve.

- $p = 3$: $3^3 \mid r \Rightarrow 3 \mid r \Leftrightarrow 35^3 + 63^{3^2-1} + 13!\,3 \equiv 0\,(3) \Leftrightarrow$ ✓ Pero no por esto!

  $\Leftrightarrow 35^3 + 0 + 0 \equiv 0\,(3) \Leftrightarrow 42875 \equiv 0\,(3) \Leftrightarrow 2 \equiv 0\,(3) \Leftrightarrow$ Abs!,

  $p = 3$ no me sirve.

⇒ Veo qué pasa si $p|35 \Leftrightarrow p$ aparece en la Factorización en primos de 35; $35=7\cdot 5 \Rightarrow p=5 \veebar p=7$, Veo si $5|r \vee 7|r$

∘) $5|r \Leftrightarrow 35^5+63^{5^2-1}+13!\,5\equiv 0\,(5) \Leftrightarrow 63^{24}\equiv 0\,(5) \Leftrightarrow 24\equiv 0\,(4) \Leftrightarrow$

$5\perp 63$, 5 primo: P.T.F

$\Leftrightarrow 63^{0}\equiv 0\,(5) \Leftrightarrow 1\equiv 0\,(5) \Leftrightarrow$ Abs!, $p=5$ no me sirve.

∘) $7|r \Leftrightarrow 35^7+63^{48}+13!\,7\equiv 0\,(7) \Leftrightarrow 0+0+0\equiv 0\,(7)$, $p=7$ me sirve.

⇒ Veo qué pasa si $p|63 \Leftrightarrow p$ aparece en la Factorización en primos de 63; $63=7\cdot 3^2 \Rightarrow p=7 \veebar p=3$, Veo si $7|r \vee 3|r$:

∘) $7|r$: ya lo vi, $7|r$. No: ~~Abs!~~ $r\equiv 0\,(7)$ pero $r\not\equiv 0\,(7^3)$ hay que mirar 7^3 y no 7

∘) $3|r$: ya lo vi, $3\nmid r$.

⇒ Veo qué pasa si $13|r \Leftrightarrow 35^{13}+63^{168}+13!\cdot 13\equiv 0\,(13) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 35^{13}+63^{168}\equiv 0\,(13) \Leftrightarrow 13\equiv 1\,(12) \wedge 168\equiv 0\,(12) \Leftrightarrow 35+63^{0}\equiv 0\,(13) \Leftrightarrow$

$13\perp 35$, 13 primo: P.T.F

$\Leftrightarrow 36\equiv 0\,(13) \Leftrightarrow 10\equiv 0\,(13)$ Abs!, $p=13$ no me sirve.

Rta: los únicos $p\in\mathbb{N}$ primos que cumplen lo pedido son los $p\in\{2,7\}$.

En realidad estás analizando demasiados primos que no tienen nada que ver con el problema, y c/r a 7, te olvidás que era $7^3|$ y no 7

R+

Ejercicio 4 en el reverso →

① a) f mónico:

b) $gr(f: 2x^3-5x^2-20x+11)=2$

c) f tiene una raíz $z \in G_3$ con $z \neq 1$, que es doble,

d) $f(0)=33$.

$\Rightarrow$ de ⓑ sé que $f \wedge 2x^3-5x^2-20x+11$ comparten 2 raíces, las busco:

◦) Busco raíces de $\underbrace{2x^3-5x^2-20x+11}_{t}$ con Gauss:

Sea $\alpha \in \mathbb{Q} / \alpha \in \left\{\frac{p}{q}\right\}, \forall\, p|11 \wedge q|2,\ p,q \in \mathbb{Z}. \Rightarrow$

$\alpha \in \left\{\pm 1, \pm 11, \pm \frac{11}{2}, \pm \frac{1}{2}\right\}$

$\Rightarrow$ Veo $t(\alpha)$:

◦) $t(1) = 2-5-20+11 \neq 0$

◦) $t(-1) = -2-5+20+11 \neq 0$.

◦) $t(11) = 2622-605-220+11 \neq 0$

◦) $t(-11) = -2622-605+220+11 \neq 0$

◦) $t\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{1331}{4} - \frac{605}{4} - 110+11 \neq 0$.

◦) $t\left(-\frac{11}{2}\right) = -\frac{1331}{4} - \frac{605}{4} + 110+11 \neq 0$.

◦) $t\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} - 10+11 = 0$. ✓

◦) $t\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{5}{4} + 10+11 \neq 0$

Conclu: $(x-\frac{1}{2}) | t$. ~~Veo $(x-\frac{1}{2})|t$ con algo de la div.~~

Pero como quiero que $f(0)=33$ y sé que las raíces de t son las mismas que las de $3t$, veo $(x-\frac{1}{2}) | t$ con algo de la div, y arreglo al final para que $f(0)=33$.

Ver siguiente hoja →

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-5x^2-20x+11 & x-\frac{1}{2} \\ \hline -\;2x^3-x^2 & 2x^2-4x-22 \;\checkmark \\ -4x^2-20x+11 & \\ -\;-4x^2+2x & \\ -22x+11 & \\ -22x+11 & \\ 0 \;// & \end{array}$$

$\Rightarrow t=(x-\frac{1}{2})(\underbrace{2x^2-4x-22}_{r})$, Veo raíces de r con Bhaskara:

$\Delta=16-4\cdot 2\cdot(-22)=192 \Rightarrow r_{+,-}=\frac{4\pm\sqrt{192}}{4}=1\pm\frac{\sqrt{2^6\cdot 3}}{4}=$

$=1\pm\frac{\sqrt{2^6}\sqrt{3}}{4}=1\pm\frac{8\sqrt{3}}{4}=1\pm 2\sqrt{3} \to r_1=1+2\sqrt{3}.$

$r_2=1-2\sqrt{3}.$

$\Rightarrow t=2(x-\frac{1}{2})\overbrace{(x-(1-2\sqrt{3}))(x-(1+2\sqrt{3}))}^{F}.$ Por qué r | f y no el otro?

$\Rightarrow$ Veo $z\in G_3$, $z\neq 1 \iff z^3=1 \iff z_k=e^{\frac{2k\pi}{3}i}$, $\forall\, 0\leq k\leq 2$.

Fórmula

$\Rightarrow z_0=1$, $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

no me sirve pues $z\neq 1$.

Al cuadrado p/q α es raíz $\Rightarrow \bar{\alpha}$ es raíz con la misma multiplicidad.

Resumen de toda la info. obtenida hasta el momento:

el f pedido tiene esta pinta: $f=(x-(1-2\sqrt{3}))(x-(1+2\sqrt{3}))(x-(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i))^2(x-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i))^2$

$=r\left((x-(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i))(x-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i))\right)^2=r(x^2+x+1)^2=r(x^2+x+1)(x^2+x+1)=$

$=r(x^4+x^3+x^2+x^3+x^2+x+x^2+x+1)=r(\underbrace{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}_{m})=\underbrace{(2x^2-4x-22)}_{2(x^2-2x-11)}(m)=$

$=2(x^2-2x-11)(x^4+2x^3+3x^2+2x+1)=2(x^6+2x^5+3x^4+2x^3+x^2-2x^5-4x^4-6x^3-4x^2-2x-11x^4-22x^3-33x^2-22x-11)$

$=2(\underbrace{x^6-12x^4-26x^3-36x^2-24x-11}_{n})$ #, pero como quería que $f(0)=3$ entonces multiplico por 3 a n ¿Porqué? pues porque ese 2 que multiplica a "n" viene de sacarlo de factor común en $(2x^2-4x-22)$, $=2(x^2-2x-11)$, el cual tiene las mismas raíces que $3(x^2-2x-11)$ en $\mathbb{Q}[x]$, entonces como $x^2-2x-11 \mid$ ⓔ, $3\cdot n$ debería de seguir compartiendo dos raíces con ⓔ$\cdot 3$, el cual tiene las mismas raíces que ⓔ.

Verif: $3(x^2-2x-11) \mid 3$ⓔ con algo. de la div.

$$
\begin{array}{l|l}
6x^3-15x^2-60x+33 & 3x^2-6x-33 \\ \hline
-\;6x^3-12x^2-66x & 2x-1 \\ \hline
-3x^2+6x+33 & \\
-3x^2+6x+33 & \\ \hline
0 \;\checkmark. &
\end{array}
$$

Verif. posta: $3(x^2-2x-11) \mid$ ⓔ con algo. de la div.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3-5x^2-20x+11 & 3x^2-6x-33 \\ \hline
-\;2x^3-4x^2-22x & \frac{2}{3}x-\frac{1}{3} \\ \hline
-x^2+2x+11 & \\
-\;-x^2+2x+11 & \\ \hline
0 \;\checkmark. &
\end{array}
$$

y $f(0)=-33$

Conclusión: puedo cambiar $2\cdot n$, por $3\cdot n$ y sigo manteniendo todo lo pedido en ⓑ y ⓒ, y agrego lo pedido en ⓓ.

$\Rightarrow f=3(x^6-12x^4-26x^3-36x^2-24x-11)=3x^6-36x^4-78x^3-108x^2-72x-33$.

Rta: Pero no es mónico!
$f=3(x^6-12x^4-26x^3-36x^2-24x-11)$

Perdón por la desprolijidad, me quedé sin tiempo.