Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Primer Parcial (5/10/2024) - 2do. Cuatrimestre 2024

TEMA 1

1	2	3	4	Nota
B	B	B⁻	B	10

[redacted] Nro de práctica: 2

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función $f(x, y) = 8 - x^2 + 2x - y^2$ y el punto $P = (1, 1)$.

   a) Parametrizar y graficar la curva de nivel de f que pasa por el punto P.

   b) Parametrizar la intersección del gráfico de f con el plano $z = 8$ y dar una ecuación de la recta tangente de dicha curva en el punto $(1, 1, f(1, 1))$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^k}{x^4 + y^4} & si\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$ para $k = 2$ y $k = 4$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|(x^2 + y^2)}{|x|^3 + y^6} & si\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   a) Hallar, si existe, la expresión de $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ para cada $v = (a, b)$, $||v|| = 1$.

   b) Analizar la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que su plano tangente en $(1, 1, f(1, 1))$ es

$$4x + 2y - 2z = 0,$$

   y sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = f\left(\cos(2x + 3y - 2) + y, e^{xy+x+y-1}\right)$. Hallar el plano tangente a h en $(1, 0, h(1, 0))$.

Escribir todos los razonamientos que justifican las respuestas.

EJ 1

[redacted]

1) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, F(x,y) = 8 - x^2 + 2x - y^2$

a) $P = (1,1)$

DEBO HALLAR UNA CURVA DE NIVEL $r(t)$ TAL QUE $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

COMO PASA POR EL PUNTO $P = (1,1)$, REEMPLAZO LAS VARIABLES Y BUSCO $F(1,1)$

$$F(1,1) = 8 - 1^2 + 2 - 1^2 = 8$$

SABIENDO ESTE VALOR, PUEDO COMENZAR A TRABAJAR EN UNA PARAMETRIZACIÓN QUE CUMPLA:

$$8 - x^2 + 2x - y^2 = 8$$

$$-x^2 + 2x - y^2 = 0$$

$$-1\left(x^2 - 2x + y^2\right) = 0$$

COMPLETO CUADRADOS $\leftarrow$ $x^2 - 2x + y^2 = 0$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

LA EXPRESIÓN CORRESPONDE A LA ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA DE RADIO 1 QUE CUMPLE $r = 1$ Y ESTÁ CENTRADA EN $x = 1$ y $y = 0$

TRANSFORMO A COORDENADAS POLARES:

$x - 1 = \cos(t)$ $\quad y = \operatorname{sen}(t)$ $\}$ DONDE $t \in [0, 2\pi]$

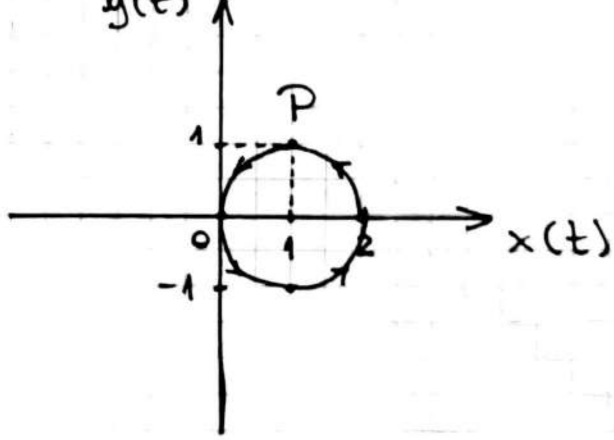
$x = \cos(t) + 1$

LA PARAMETRIZACIÓN DE LA CURVA DE NIVEL ES:

$$r(t) = \left(\cos(t) + 1,\ \operatorname{sen}(t)\right),\ t \in [0, 2\pi]$$

PARA GRAFICAR PUEDO BUSCAR ALGUNOS VALORES DE t:

t	$x(t)$	$y(t)$
0	2	0
π	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	1
$\frac{3\pi}{2}$	1	-1
2π	2	0



EL PARÁMETRO t CORRESPONDIENTE A $P=(1,1)$ ES $\frac{\pi}{2}=t$

6) CUANDO $F(x,y)=z=8$ (INTERSECCIÓN CON EL PLANO)

LA ECUACIÓN QUEDA: $8-x^2+2x-y^2=8=z$

$-x^2+2x-y^2=0$, QUE ES

LA EXPRESIÓN PARAMETRIZADA EN EL PUNTO a).

COMO AHORA SE BUSCA UNA PARAMETRIZACIÓN EN EL ESPACIO DE UNA CURVA, SE PUEDE PLANTEAR:

$\alpha(t)=(\cos(t)+1, \operatorname{sen}(t), 8)$, $t\in[0,2\pi]$

LA ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE ESTÁ DADA POR:

$R_T: \lambda\,\alpha'(t_0)+\alpha(t_0)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

SABIENDO QUE, EN $P(1,1)$, $t_0=\frac{\pi}{2}$, BUSCO LA DERIVADA DE CADA COMPONENTE DE LA PARAMETRIZACIÓN.

$\alpha'(t)=(-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0)$, Y EVALÚO $t_0=\frac{\pi}{2}$

$$\alpha'(\pi/2)=(-\operatorname{sen}(\pi/2), \cos(\pi/2), 0)$$
$$=(-1, 0, 0)$$

ENTONCES, COMPLETO LA RECTA TANGENTE:

$$R_T: \lambda(-1,0,0)+(1,1,8)$$

[redacted]

2 ~~3~~

2) SEA $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^k}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ESTUDIO LA CONTINUIDAD DE F PARA $k=2$ Y $k=4$.

SI $k=2$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^2}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$F(x,y)$ ES CONTINUA PARA CUALQUIER PUNTO $(x,y) \neq (0,0)$ DADO QUE SE TRATA DE UNA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES CONTINUAS (ES UN COCIENTE DE POLINOMIOS).

PARA QUE SEA CONTINUA EN $(x,y) = (0,0)$, SE DEBE CUMPLIR QUE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = F(0,0) = 0$$

PRIMERO PLANTEO LÍMITES ITERADOS:

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{(xy)^2}{x^4+y^4}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{(xy)^2}{x^4+y^4}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = 0$$

APROXIMO POR LA CURVA $y = mx$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(xmx)^2}{x^4+(mx)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2m^2x^2}{x^4+m^4x^4} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^4}m^2}{\cancel{x^4}(1+m^4)} = \frac{m^2}{1+m^2}$$

ESTA EXPRESIÓN ME INDICA QUE EL LÍMITE DEPENDE DE LA PENDIENTE m.

DADO QUE LOS LÍMITES ITERADOS NO COINCIDEN CON LA APROXIMACIÓN CUANDO $y = mx$, NO EXISTE EL LÍMITE.

CUANDO $k=2$, F ES CONTINUA PARA $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

SI $k=4$, PARA QUE F SEA CONTINUA EN $(x,y)=(0,0)$ DEBE DARSE QUE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy)^4}{x^4+y^4} = F(0,0) = 0$$

CABE DESTACAR QUE F CUANDO $k=4$ ES CONTINUA FUERA DE $(0,0)$ POR SER COMPOSICIÓN DE FUNCIONES CONTINUAS.

PRIMERO BUSCO LÍMITES ITERADOS:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{(xy)^4}{x^4+y^4}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{(xy)^4}{x^4+y^4}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0$$

APROXIMO POR $y = mx$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x\,mx)^4}{x^4+(mx)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 m^4 x^4}{x^4 + m^4 x^4} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{8}} m^4}{\cancel{x^4}(1+m^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 m^4}{1+m^4} = 0$$

PODRÍA APROXIMAR PLANTEANDO UNA CURVA EN COORDENADAS POLARES:

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\mathrm{sen}(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{(r\cos(t)\, r\,\mathrm{sen}(t))^4}{(r\cos(t))^4 + (r\,\mathrm{sen}(t))^4} =$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^{\cancel{8}}(\cos^4(t)\,\mathrm{sen}^4(t))}{\cancel{r^4}(\cos^4(t)+\mathrm{sen}^4(t))} = 0$$

VOY A TERMINAR DE DEMOSTRAR EL LÍMITE ACOTANDO SEGÚN EL TEOREMA DEL SÁNDWICH.

BUSCO UNA FUNCIÓN $g(x,y)$ DE MANERA QUE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 \quad \text{Y SE CUMPLA:}$$

$$0 \leq |F(x,y) - 0| \leq g(x,y)$$

$$0 \leq \left|\frac{(xy)^4}{x^4+y^4}\right| = \frac{|xy|^4}{|x|^4+|y|^4} = \frac{|x|^4|y|^4}{x^4+y^4}$$

EJ 2 (p 2)

[redacted]

3

PUEDO PLANTEAR QUE $x^4 \le x^4 + y^4$, YA QUE EL ÚNICO CASO DONDE $x^4 = x^4$ ES CUANDO $y^4 = 0$.

$$\frac{x^4 \cdot y^4}{x^4 + y^4} \le \frac{\cancel{(x^4 + y^4)}\, y^4}{\cancel{x^4 + y^4}} = y^4$$

ENTONCES:

$$0 \le \left| \frac{x^4 y^4}{x^4 + y^4} \right| \le y^4$$

$$0 \le \lim_{(x,y)\to 0} \left| \frac{x^4 y^4}{x^4 + y^4} \right| \le \lim_{y \to 0} y^4 = 0$$

CUANDO $k=4$

CON ESTO, DECIMOS QUE F ES CONTINUA PARA TODO $\mathbb{R}^2$ YA QUE EL LÍMITE CUANDO LA FUNCIÓN TIENDE A CERO ES IGUAL A SU IMAGEN EN (0,0)

EJ 3 (p1)

[redacted]

4 $\frac{5}{2}$

3) Sea $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,|y|\,(x^2+y^2)}{\sqrt{|x|^3+y^6}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) HALLAR LA EXPRESIÓN $\frac{\partial F}{\partial v}(0,0)$ PARA $v=(a,b)$, $\|v\|=1$

RECORDAR LAS DERIVADAS DIRECCIONALES SIGUEN LA EXPRESIÓN:

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(P+tv)-F(P)}{t}, \; Y \; P=(0,0)$$

EN ESTE CASO, SE TRANSFORMA A:

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(ta,tb)-F(0,0)}{t} \quad \text{DONDE } v=(a,b), \; \|v\|=1$$

REEMPLAZO LA FUNCIÓN Y BUSCO EL LÍMITE:

$$\lim_{t\to 0} \frac{ta\,|tb|\,((ta)^2+(tb)^2)}{|ta|^3+(tb)^6} \cdot \frac{1}{t}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{ta\,|tb|\,(t^2a^2+t^2b^2)}{(|ta|^3+t^6b^6)\,t}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^{\cancel{3}}a\,|tb|\,(a^2+b^2)}{\cancel{t}\,(|ta|^3+t^6b^6)}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2a\,|tb|\,(a^2+b^2)}{|ta|^3+t^6b^6}$$

COMO MI EXPRESIÓN CONTIENE MÓDULOS, BUSCO LOS LÍMITES LATERALES:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^2a\,tb\,(a^2+b^2)}{t^3a^3+t^6b^6} =$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\cancel{t^3}\,(ab\,(a^2+b^2))}{\cancel{t^3}\,(a^3+t^3b^6)} = \frac{ab\,(a^2+b^2)}{a^3+t^3b^6}$$

estudiar $a=0$ como caso aparte

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{t^2 a |-tb| (a^2+b^2)}{|-ta|^3 + t^6 b^6} =$$

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{t^2 a\, tb (a^2+b^2)}{(ta)^3 + t^6 b^6} =$$

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{\cancel{t^3}\, ab(a^2+b^2)}{\cancel{t^3}(a^3+t^3b^6)} = \frac{ab\overbrace{(a^2+b^2)}^{=1}}{a^3+t^3b^6}$$

CUANDO t TIENDE A CERO, LA EXPRESIÓN QUEDA COMO:

$$\frac{\cancel{a}b(a^2+b^2)}{a^{\cancel{3}}} = \frac{b(a^2+b^2)}{a^2}.$$

CUANDO a y b SON DISTINTOS DE CERO, LA EXPRESIÓN PERMANECE VÁLIDA, DADO QUE NO SE ANULA EL DENOMINADOR. LO MISMO OCURRE CUANDO $b=0$ y $a=1$ $(V=(1,0))$.

SIN EMBARGO, CUANDO $V=(0,1)$, NO EXISTE EL LÍMITE, PUES SE TERMINA ANULANDO EL DENOMINADOR Y EL NUMERADOR ES UN NÚMERO DISTINTO DE CERO.

POR LO TANTO, NO EXISTE LA DERIVADA PARCIAL EN y DE LA FUNCIÓN. Sí existe, $a=0$ se trata APARTE

b) F NO ES DIFERENCIABLE EN (0,0) YA QUE NO EXISTEN TODAS LAS DERIVADAS DIRECCIONALES EN EL PUNTO (EN PARTICULAR, $F_y(0,0)$)

SIN EMBARGO, CUANDO BUSCO LAS DERIVADAS PARCIALES:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(h,0)+0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot 0\cdot(h^2)}{|h|^3}\cdot\frac{1}{h} = 0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(0,h)+0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0\cdot|h|\cdot(h^2)}{h^6}\cdot\frac{1}{h} = 0$$

PARECEN EXISTIR. VOY A PLANTEAR QUE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x|y|(x^2+y^2)}{|x|^3+y^6} - 0x - 0y - 0}{\|(x,y)\|} = 0$$

PARA QUE SEA DIFERENCIABLE LA FUNCIÓN EN (0,0)

LÍMITES ITERADOS:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x|y|(x^2+y^2)}{(|x|^3+\cancel{y^6})\,\|(x,y)\|}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{y^6\cdot\sqrt{y^2}} = 0$$

EJ 3 (p2) [redacted]

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{|y|\, x\,(x^2+y^2)}{(|x|^3+y^6)\,\|(x,y)\|}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{|x|^3 \cdot \sqrt{x^2}} = 0$$

APROXIMO POR $y = x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,|x|\,(x^2+x^2)}{(|x|^3+x^6)\sqrt{x^2+x^2}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,|x|\,2x^2}{(|x|^3+x^6)\sqrt{2}\,|x|},$$ BUSCO LOS LÍMITES LATERALES:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x \cdot x \cdot 2x^2}{(x^3+x^6)\sqrt{2}\,x} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x^4}{(x^4+x^7)\sqrt{2}} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x^4}\cdot 2}{\cancel{x^4}(1+\underbrace{x^3}_{\to 0})\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x(-x)\,2x^2}{((-x)^3+x^6)(-x)\sqrt{2}} =$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-\cancel{x^4}\cdot 2}{\cancel{x^4}(1-\underbrace{x^3}_{\to 0})\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

NO SON COINCIDENTES

NO EXISTE EL LÍMITE.

A PARTIR DE USAR LA FÓRMULA DE DIFERENCIABILIDAD, SE DEMUESTRA QUE LA FUNCIÓN NO ES DIFERENCIABLE EN (0,0) PORQUE EL LÍMITE NO ES IGUAL A 0. (PLANTEADO)

DESCONOZCO QUÉ ESTOY PLANTEANDO MAL AL ANALIZAR LA EXISTENCIA DE $F_y(0,0)$

EJ 4

6

[redacted]

4) $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ES DIFERENCIABLE:

↳ $z_{F(1,1,F(1,1))} = 4x + 2y - 2z = 0$

$h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, h(x,y) = F(\cos(2x+3y-2)+y, e^{xy+x+y-1})$

HALLAR $z_{h}(1,0,h(1,0))$

EL PLANO TANGENTE A LA GRÁFICA DE h EN $(1,0,h(1,0))$ EXISTE POR SER h UNA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES DIFERENCIABLES.

SU ECUACIÓN ES:

$$z = h_x(1,0)(x-1) + h_y(1,0)\,y + h(1,0)$$

PRIMERO BUSCO $h(1,0) \Rightarrow F(\cos(2+3.0-2)+0, e^{1.0+1+0-1}) = F(1,1) \rightarrow$ ESTE DATO LO OBTENGO DEL PLANO TANGENTE A F EN $(1,1,F(1,1))$

$$4x + 2y = 2z$$

$$\frac{4x+2y}{2} = z = 2x + y$$

$$F(1,1) = 2.1 + 1 = 3$$

TAMBIÉN PUEDO EXPRESAR EL GRÁFICO COMO:

$$z = 2(x-1) + y - 1 + 3$$

$$2x - 2 + y - 1 + 3 = 2x + y$$

ASÍ SÉ QUE ESTA EXPRESIÓN SIGUE LA FORMA:

$$z = F_x(1,1)(x-1) + F_y(1,1)(y-1) + F(1,1)$$

DONDE $F_x(1,1) = 2$ Y $F_y(1,1) = 1$

~~PARA CONOCER EL PLANO TANGENTE A h EN (1,0,h(1,0)) SIGO LA EXPRESIÓN:~~

~~$z = h_x(1,0)(x-1) + h_y(1,0)$~~

PARA FORMAR EL PLANO TANGENTE A h EN $(1,0,h(1,0))$ NECESITO:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x_1}(1,0)\,\frac{\partial x_1^{*}}{\partial x}(1,0) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(1,0)\,\frac{\partial x_2}{\partial x}(1,0)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x_1}(1,0)\,\frac{\partial x_1}{\partial y}(1,0) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(1,0)\,\frac{\partial x_2}{\partial y}(1,0)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = -\operatorname{sen}(2x+3y-2)\cdot 2$$

* DONDE x_1, x_2 SON COMPONENTES, x, y SON VARIABLES.

$$\frac{\partial x_1}{\partial x}(1,0) = -\operatorname{sen}(2-2)\cdot 2 = 0$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial x} = e^{xy+x+y-1}\cdot(y+1)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial x}(1,0) = e^{0+1+0-1}\cdot 1 = 1$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial y} = -\operatorname{sen}(2x+3y-2)\cdot 3 + 1$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial y}(1,0) = -\operatorname{sen}(2-2)\cdot 3 + 1 = 1$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial y}(1,0) = e^{xy+x+y-1}\cdot(x+1)$$
$$= e^{0+1+0-1}\cdot 2 = 2$$

TENIENDO TODOS LOS VALORES NECESARIOS, BUSCO:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(1,0) = 2\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}(1,0) = 2\cdot 1 + 1\cdot 2 = 4$$

ENTONCES EL PLANO TANGENTE A $G(x,y)$ EN $(1,0)$ ES:

$$z_G(1,0,G(1,0)) = (x-1) + 4y + 3$$
$$= x + 4y + 2$$