**Lógica y Computabilidad**
Segundo Cuatrimestre de 2023
**Primer Parcial**

*Departamento de Computación*
*Facultad de Ciencias Exactas y Naturales*
*Universidad de Buenos Aires*

▷ Resolver cada ejercicio en **una hoja separada**.
▷ Poner nombre y LU en todas las hojas.
▷ Se debe **justificar todas las respuestas**.
▷ El examen es **a libro abierto** y puede usarse lo demostrado en clase o en ejercicios de las guías con **referencias claras y precisas** de dónde vienen.
▷ El examen se aprueba con al menos 2 ejercicios complementamente bien resueltos y se promociona con al menos 3 en esa condición.

| Nombre y Apellido: | Nota: | | | |
|---|---|---|---|---|
| Libreta Universitaria: | Ej. 1 | Ej. 2 | Ej. 3 | Ej. 4 |

**Ejercicio 1.** Decimos que un $\mathcal{S}$-programa tiene 'saltos inalcanzables' si en su código hay por lo menos 2 instrucciones distintas con la misma etiqueta.
Sea $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ el predicado que, dado $x$, determina si el programa con número $x$ tiene saltos inalcanzables (en cuyo caso devuelve 1), o no (en cuyo caso devuelve 0).

a) Demostrar que $s$ es parcial computable, y decidir si es primitiva recursiva.

b) Sea $e$ la codificación de un programa que computa $s$. ¿Es cierto que siempre $s(e) = 0$? Demostrar o refutarlo.

**Ejercicio 2.** Dada $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ decimos que $\mathrm{Im}(f) \subseteq PR$ si para todo $n$, $\Phi^{(1)}_{f(n)}$ es una función primitiva recursiva. Dada $f$, definimos $g_f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como $g_f(x) = \Phi^{(1)}_{f(x)}(x)$.

a) Dar una $f$ con $\mathrm{Im}(f) \subseteq PR$ tal que $g_f$ sea p.r.

b) Demostrar que si $f$ es tal que $\mathrm{Im}(f) = PR$ (es decir, la imagen de $f$ consiste de todos los programas que, tomados como funciones unarias, son p.r.), entonces $g_f$ no es p.r.

**Ejercicio 3.** Determinar si los siguientes conjuntos son c.e., co-c.e., p.r., o ninguna de las anteriores.

a) $A = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{N}, \Phi_x(64)\downarrow, \Phi_y(64)\downarrow, \text{ y } \Phi_x(64) > \Phi_y(64)\}$

b) $B = \{x \mid \mathrm{Dom}\,\Phi_x = \mathrm{Im}\,\Phi_x\}$

**Ejercicio 4.** Dado $x \in \mathbb{N}$, sea $\mathrm{Up(x)} = \{\langle x, y\rangle \mid y \geq x\}$. Decidir si la siguiente función es computable

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{Im}\,\Phi_x \subseteq \mathrm{Up(x)}, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$