Tema 1

1	2	3	4
B	B	B	B

CALIF.
10

4 hojas

APELLIDO Y NOMBRE: Manzotti Mauro

NRO. LIBRETA:

TURNO: Noche

CARRERA: Cs. de la Computación

Primer Recuperatorio Segundo Parcial - 13/07/2024 - 1er. Cuatrimestre 2024

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II(C)

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^3 tal que su polinomio de Taylor de orden 3 en el punto $(1,1)$ es
$$T_3(x,y) = y^3 + 3x^2 - y^2 + 2xy^2 - 8x - 5y + 8.$$
   (a) Probar que el punto $(1,1)$ es un punto crítico de f.
   (b) Clasificar el punto $(1,1)$ como máximo, mínimo o punto silla de f y hallar el valor que toma la función en dicho punto.

2. Hallar, si existen, los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ en la región
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1, \ \ y \geq -1\right\}.$$

3. (a) Analizar la convergencia de la siguiente integral
$$\int_1^{+\infty} \frac{(2x^2 + x)\,(\operatorname{sen}(x) + 4)}{\sqrt[3]{2x^7 - 1}}\,dx.$$
   (b) Calcular
$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \operatorname{sen}(y^3)\,dydx.$$

4. Calcular la integral
$$\iiint_W z e^{-3(x^2+y^2+z^2)^2}\,dxdydz,$$
donde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 2 - x^2 - y^2, \ \ x \leq 0, \ \ z \geq 0\}$.

Justifique sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

Mauro Manzotti:

EJERcicio 1

1) $f: C^3$ $\quad T_3(x,y) = y^3+3x^2-y^2+2xy^2-8x-5y+8$

T_3 es Taylor de f en $(1,1)$

a) No sé la fórmula f, pero sí sé su polinomio de Taylor en el punto donde me piden probar que es crítico, así que puedo usar T_3 y sus derivadas como si fuera f únicamente en ese punto. $(1,1)$

Para probar que un punto p es crítico, $\nabla f(p) = (0,0)$.

$\nabla f(p) = \nabla_{T_3}(p)$ $\qquad T_{3x} = 6x+2y^2-8$

$\nabla_f(1,1) = \nabla_{T_3}(1,1)$ $\qquad T_{3y} = 3y^2-2y+4xy-5$

$\rightarrow \nabla_f(1,1) = (6x+2y^2-8,\ 3y^2-2y+4xy-5)\Big|_{x=1,\, y=1}$

$\rightarrow \nabla_f(1,1) = (0,0)$ por lo tanto $(1,1)$ es crítico.

b) Ahora para clasificar ese punto debo usar el criterio del Hessiano:

$H_f(1,1) = H_{T_3}(1,1)$ $\qquad T_{3xx} = 6 \qquad T_{3xy} = 4y \qquad T_{3yy} = 6y-2+4x$

$$\rightarrow H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & 4y \\ 4y & 6y-2+4x \end{pmatrix}\Bigg|_{x=1,\, y=1} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Uso el criterio de los menores: $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ $\qquad \Delta_1 = 6$

$\Delta_2 = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = 32$

Como Δ_1 y Δ_2 son positivos, la matriz es definida positiva, por lo que $(1,1)$ es un mínimo de f.

$f(1,1) = T_3(1,1) = 0$

Mauro Manzotti

2

EJERCICIO 2

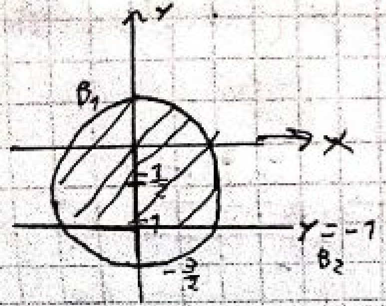
$f(x,y) = x^2 + 4y^2 \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 + (y+\tfrac{1}{2})^2 \le 1}_{B_1},\ \underbrace{y \ge -1}_{B_2}\}$

~~Desarrollo la forma de B_1, lo desarrollo:~~

~~$x^2 + (y+\frac{1}{2})^2 \le 1 \to x^2 + y^2 + y$~~

B_1 es una circunferencia centro $(0, -\frac{1}{2})$ radio 1.

D:



Ahora para hallar puntos críticos, debo buscar en D°, ∂D, y sus vértices.

(por el Teo. de Weierstrass, como D es cerrado y compacto, alcanza máx y mín abs.)

D°: Busco puntos P tq $\nabla_f(x,y) = (0,0)$ y $P \in D$.

$f_x = 2x \qquad f_y = 8y \qquad \nabla_f = (2x, 8y)$

$\begin{cases} 2x = 0 \\ 8y = 0 \end{cases} \leftrightarrow x, y = 0 \qquad P_1 = (0,0) \in D^\circ$

∂D: Parametrizo B_1 y B_2:

$\sigma_1(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{2})$

$\sigma_2(t) = (t, -1)$ — t?

Y ahora para encontrar puntos críticos en esos borde debo evaluar $\frac{d}{dt} f \circ \sigma(t) = 0$.

$f \circ \sigma_1(t) = \cos^2 t + 4(\operatorname{sen} t - \frac{1}{2})^2 = \cos^2 t + 4(\operatorname{sen}^2 t - \operatorname{sen} t + \frac{1}{4})$

$= \cos^2 t + 4\operatorname{sen}^2 t - 4\operatorname{sen} t + 1$

$\frac{d}{dt} f \circ \sigma_1 = -2 \sin t \cos t + 8 \sin t \cos t - 4 \cos t$

$= \cos t \cdot (\sin t \cdot 6 - 4)$

$\cos t \cdot (6\,\text{sen}\,t - 4) = 0 \rightarrow$ Si $\cos t = 0$: $t \in \{\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\} \rightarrow$ $P_2 = \sigma_1(\frac{1}{2}\pi) = (0, \frac{1}{2}) \in D$
$\sigma_1(\frac{3}{2}\pi) = (0, -\frac{3}{2}) \notin D$

Si no: $6\,\text{sen}\,t - 4 = 0$

$6\,\text{sen}\,t = 4$

$\text{sen}\,t = \frac{2}{3}$ no sé que valor es t para cumplir esto,

sin embargo puedo reemplazarlo en $\sigma_1(t)$:

$\sigma_1(t) = (\cos t, \text{sen}\,t - \frac{1}{2}) = (\cos t, \frac{2}{3} - \frac{1}{2})$

$= (\cos t, \frac{1}{6})$ y ahora puedo despejar x $(\cos(t))$ usando B_1:

$B_1: x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 1$

$x^2 + (\frac{1}{6} + \frac{1}{2})^2 = 1 \rightarrow x^2 + \frac{4}{9} = 1 \rightarrow x^2 = \frac{5}{9} \rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

$P_3 = (\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{1}{6}) \in \partial D$, $P_4 = (-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{1}{6}) \in \partial D$

Hago lo mismo para σ_2: $\sigma_2 = (t, -1)$

$f \circ \sigma_2(t) = t^2 + 4$ $\frac{\partial}{\partial t} f \circ \sigma_2 = 2t$

$2t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \rightarrow P_5 = \sigma_2(0) = (0, -1) \in \partial D$

Vértices de D: $B_1 \cap B_2$

$\begin{cases} x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

$\rightarrow x^2 + (-\frac{1}{2})^2 = 1$

$\rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$P_6 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -1)$ $P_7 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1)$

Ahora sé todos los puntos críticos P de $f|_D$:

$P \in \{(0,0), (0, \frac{1}{2}), (\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{1}{6}), (-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{1}{6}), (0, -1), (\frac{\sqrt{3}}{2}, -1), (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1)\}$

Evalúo cada punto: $f(0,0) = 0$ $f(0, \frac{1}{2}) = 1$ $f(\frac{\sqrt{3}}{2}, -1) = \frac{19}{4} \approx 4{,}75$

$f(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{1}{6}) = \frac{2}{3}$ $f(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{1}{6}) = \frac{2}{3}$ $f(0, -1) = 4$ $f(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1) = \frac{19}{4}$

Por lo tanto:

- mínimo: 0 en $(0,0)$
- máximo: $\frac{19}{4}$ en $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -1)$ y $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1)$

Mauro Manzotti

EJERCICIO 3 3

a) $\int_1^{+\infty} \frac{(2x^2+x)(\operatorname{sen}(x)+4)}{\sqrt[3]{2x^7-1}}\, dx$

Para evaluar si una integral converge, puedo desarrollarlo:

- Si una integral menor diverge, entonces también diverge
- Si una integral mayor converge, entonces también converge.

Sospecho que converge así que busco una integral mayor.

$\frac{(2x^2+x)(\operatorname{sen}(x)+4)}{\sqrt[3]{2x^7-1}}$ Como $-1 \le \operatorname{sen}(x) \le 1$ $\left(y\ (2x^2+x)\ge 0\right)$

$\le \frac{(2x^2+x)\cdot 5}{\sqrt[3]{2x^7-1}}$ Como $x\in[1,+\infty]$, $2x^2+x \le 3x^2 \le 14x^6$

$\le 5\cdot \frac{14x^6}{\sqrt[3]{2x^7-1}}$ Esta ecuación será fácil de integrar así que tomo esa como integral mayor.

$\int_1^{+\infty} 5\cdot\frac{14x^6}{\sqrt[3]{2x^7-1}}\,dx = 5\int_1^{+\infty} 14\cdot\frac{x^6}{\sqrt[3]{2x^7-1}}\,dx$ Sustituyo: $u=2x^7-1$ $du=14x^6\,dx$

$= 5\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{u}}\,du = 5\int_1^{+\infty} u^{-\frac{1}{3}}\,du$

$\frac{1}{x^p}$ converge si $p>1$ y diverge si $p\le 1$, por lo que mi integral diverge.

Necesito probar ahora si diverge, busco una menor:

$\frac{(2x^2+x)(\operatorname{sen}(x)+4)}{\sqrt[3]{2x^7-1}} \overset{x\ge1\ y\ \operatorname{sen} x\ge -1}{\ge} 3\cdot\frac{(2x^2+x)}{\sqrt[3]{2x^7-1}} \overset{x\ge1}{\ge} 3\cdot\frac{2x^2}{\sqrt[3]{2x^7-1}}$

$\ge 3\cdot\frac{2x^2}{\sqrt[3]{2x^7}} = 6\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{x^2}{x^{\frac{7}{3}}} = \frac{6}{\sqrt[3]{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$

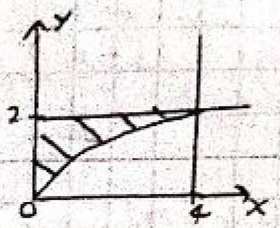
Tomo $\frac{6}{\sqrt[3]{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$ como integral menor:

$\int_1^{+\infty}\frac{6}{\sqrt[3]{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{6}{\sqrt[3]{2}}\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{6}{\sqrt[3]{2}}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ lo cual diverge ya que $p\le 1$.

Como $\int_1^{+\infty}\frac{(2x^2+x)(\operatorname{sen}(x)+4)}{\sqrt[3]{2x^7-1}}\,dx \ge \int_1^{+\infty}\frac{6}{\sqrt[3]{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$, ambas divergen.

b) $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 sen(y^3)\, dy\, dx$ Para hacerlo más fácil de calcular, le cambio el orden:

$\sqrt{x} = y \Rightarrow y = x^2$



$$\begin{matrix} \sqrt{x} \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 0 \leq x \leq y^2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{matrix}$$

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 sen(y^3)\, dy\, dx = \int_0^2 \int_0^{y^2} sen(y^3)\, dx\, dy$$

Resuelvo integral por integral:

- $\int_0^{y^2} sen(y^3)\, dx = x \cdot sen(y^3) \Big|_{x=0}^{x=y^2} = y^2 sen(y^3)$

- $\int_0^2 y^2 sen(y^3)$ Sustituyo: $u = y^3$ $du = 3y^2 dx$ $\frac{du}{3} = y^2 dx$

$$= \frac{1}{3} \int_0^2 sen(u)\, du = -\frac{1}{3} \cos(y^3) \Big|_{y=0}^{y=2}$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot (\cos(8) - \cos(0)) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos(8)$$

$\therefore \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 sen(y^3)\, dy\, dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos(8)$

EJERCICIO 4

$$\iiint_W z e^{-3(x^2+y^2+z^2)^2}\,dx\,dy\,dz \qquad W: \begin{array}{l} x^2+y^2 \le z^2 \le 2-x^2-y^2 \\ x \le 0,\ z \ge 0 \end{array}$$

Hago cambio de variable a esféricas:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho \ge 0 \\ \theta \in [0, 2\pi) \\ \varphi \in [0, \pi] \end{array} \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$J = \rho^2\,\text{sen}\,\varphi$

Desarrollo los términos de W en esféricas:

$x^2+y^2 \le z^2 \le 2-x^2-y^2$: Separo en 2 inecuaciones:

- $x^2+y^2 \le z^2 \rightarrow \rho^2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\varphi + \rho^2\,\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\varphi \le \rho^2\cos^2\varphi$

$\rightarrow \rho^2 \cdot (\text{sen}^2\varphi(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)) \le \rho^2\cos^2\varphi$

$(\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta)=1 \quad \rightarrow \rho^2\,\text{sen}^2\varphi \le \rho^2\cos^2\varphi$

$\rightarrow \text{sen}^2\varphi \le \cos^2\varphi \rightarrow \varphi \in [0, \frac{1}{4}\pi] \cup [\frac{3}{4}\pi, \pi]$

~~$\rho^2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\varphi + \rho^2\,\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\varphi \le \rho^2\cos^2\varphi \le 2-\rho^2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\varphi - \rho^2\,\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\varphi$~~

~~Resto $\rho^2\cos^2\varphi$ de toda la inecuación:~~

~~$\rho^2\,\text{sen}^2\varphi(\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta) - \rho^2\cos^2\varphi \le 0 \le 2-\rho^2\,\text{sen}^2\varphi(\cos^2\theta+\text{sen}^2) - \rho^2\cos^2\varphi$~~

~~Como $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 0$:~~

~~$\rho^2\,\text{sen}^2\varphi - \rho^2\cos^2\varphi \le 0 \le 2-\rho^2\,\text{sen}^2\varphi - \rho^2\cos^2\varphi$~~

~~$\rho^2\,\text{sen}^2\varphi - \rho^2\cos^2\varphi \le 0 \le 2-\rho^2(\text{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi)$~~

~~$\rho^2(\text{sen}^2\varphi - \cos^2\varphi) \le 0 \le 2-\rho^2$~~

- $z^2 \le 2-x^2-y^2$

$\rightarrow 0 \le 2-x^2-y^2-z^2$

$\rightarrow 0 \le 2-\rho^2$

$\rightarrow \rho^2 \le 2 \rightarrow \rho \le \sqrt{2}$ (como $\rho \ge 0$)

$x \le 0 \to \rho \cos\theta \,\text{sen}\varphi \le 0$

$\to$ Como $\rho \ge 0$:

$\to \cos\theta \,\text{sen}\varphi \le 0$ Como $\varphi \in [0,\pi]$, sen φ siempre es ≥ 0

$\to \cos\theta \le 0 \to \theta \in [\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$

$z \ge 0 \to \rho\cos\varphi \ge 0$

Como $\rho \ge 0$:

$\to \cos\varphi \ge 0 \to \varphi \in [0, \frac{1}{2}\pi]$

Juntando lo que sé:

$\varphi \in [0, \frac{1}{4}\pi] \cup [\frac{3}{4}\pi, \pi] \wedge \rho \le \sqrt{2} \wedge \theta \in [\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi] \wedge \varphi \in [0, \frac{1}{2}\pi]$

$W_{esf} = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 / 0 \le \rho \le \sqrt{2},\ \frac{1}{2}\pi \le \theta \le \frac{3}{2}\pi,\ 0 \le \varphi \le \frac{1}{4}\pi\}$

Sabiendo W_{esf} puedo resolver la integral en esféricas

$$\iiint_W z e^{-3(x^2+y^2+z^2)^2} \, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_{W_{esf}} \rho\cos\varphi \cdot e^{-3\rho^4} \cdot \overbrace{\rho^2 \,\text{sen}\varphi}^{\text{Jacobiano}} \, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \cos\varphi \,\text{sen}\varphi \cdot \rho^3 \cdot e^{-3\rho^4} \, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

Ojo (cambio con

Resuelvo cada integral:

· $\int_0^{\sqrt{2}} \cos\varphi\,\text{sen}\varphi \cdot \rho^3 e^{-3\rho^4} \, d\rho$ Sustituyo: $u = -3\rho^4$ $du = -12\rho^3 d\rho$ $-\frac{du}{12} = \rho^3 d\rho$

$= -\frac{1}{12}\cos\varphi\,\text{sen}\varphi \cdot \int_0^{\sqrt{2}} e^u \, du = -\frac{1}{12}\cos\varphi\,\text{sen}\varphi \cdot (e^{-3\rho^4})\Big|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{2}} = -\frac{1}{12}\cos\varphi\,\text{sen}\varphi \cdot (e^{-12} - 1)$

· $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} -\frac{1}{12}\cos\varphi\,\text{sen}\varphi \cdot (e^{-12}-1)\, d\theta = -\frac{1}{12}\cos\varphi\,\text{sen}\varphi \cdot (e^{-12}-1) \cdot (\frac{3}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi) = -\frac{\pi}{12}(e^{-12}-1) \cdot \cos\varphi\,\text{sen}\varphi$

· $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} -\frac{\pi}{12}(e^{-12}-1) \cdot \cos\varphi\,\text{sen}\varphi \, d\varphi$ Sustituyo: $u = \text{sen}\varphi$ $du = \cos\varphi\, d\varphi$

$= -\frac{\pi}{12}(e^{-12}-1) \cdot \int_0^{\frac{1}{4}\pi} u \, du = -\frac{\pi}{12}(e^{-12}-1) \cdot \frac{1}{2}\text{sen}^2\varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{1}{4}\pi}$

$= -\frac{\pi}{12}(e^{-12}-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 0)$

$= -\frac{\pi}{48}(e^{-12}-1)$

Por lo tanto $\iiint_W z e^{-3(x^2+y^2+z^2)^2} \, dx\, dy\, dz = -\frac{\pi}{48}(e^{-12}-1)$