Métodos Numéricos

1er Cuatrimestre 2024

2do Parcial (14/06/2024)

DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

Nombre y Apellido:

Libreta Universitaria:

Total de hojas entregadas (sin enunciado): 5

1) 1 2) 2 3) 1 4) 1

Puntajes por resolución de ejercicios y condiciones generales de corrección				
Ej. 1 26	Ej. 2 21	Ej. 3 16	Ej. 4 24	Final 87

El examen se aprueba con 60 puntos. Resolver los ejercicios en hojas separadas. Incluir LU y nombre en hojas y enunciado.	**Justificar <u>todas</u> las respuestas** Puede hacerlo citando resultados de la teórica o la práctica. Para ejercicios de la guía, consulte.

Ejercicio 1 (28 puntos). Dada una matriz $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, notamos como $S_\lambda(C)$ al subespacio de autovectores de autovalor λ de la matriz C. Consideramos $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con A inversible

a) (7 puntos) Probar que AB y BA tienen el mismo polinomio característico.

b) (7 puntos) Probar que $v \in S_\lambda(AB)$ si y sólo si $A^{-1}v \in S_\lambda(BA)$.
Deducir que para todo autovalor λ de AB (o BA) vale que $dim(S_\lambda(AB)) = dim(S_\lambda(BA))$.

c) (7 puntos) Probar que AB es diagonalizable si y sólo si BA es diagonalizable.

d) (7 puntos) Hallar $E, F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ con E inversible, no diagonalizables, tales que EF resulte diagonalizable.

Ejercicio 2 (26 puntos). Sean $u_1, \dots, u_m$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$, $v_1, \dots, v_n$ una base ortonormal en $\mathbb{R}^n$ y $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_k > 0 \in \mathbb{R}$ tal que $k \leqslant min(m, n)$ y sea $A = \sum_{i=1}^{k} a_i u_i v_i^t \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

a) (7 puntos) Calcular el núcleo de $u_i v_j^t$ con $1 \leqslant i \leqslant m$ y $1 \leqslant j \leqslant n$.

b) (11 puntos) Dar una descomposición SVD de A.

c) (8 puntos) Dar bases para el núcleo y la imagen de A.

Ejercicio 3 (22 puntos). Sea $A = QR$ la factorización QR de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, donde además $1 < r_{11} \leqslant r_{22} \leqslant \dots \leqslant r_{nn}$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Se desea hallar la solución del sistema $(I - Q^t A)x = b$.

a) Para resolver el sistema se propone el siguiente sistema iterativo, con $\omega \in \mathbb{R}$ una constante no nula:

$$x^{(k+1)} = ((1-\omega)I + \omega R)\, x^{(k)} + \omega b, \qquad k = 0, 1, \dots$$

i) (6 puntos) Probar que si el sistema iterativo converge, entonces lo hace a una solución del sistema.

ii) (8 puntos) Hallar los valores de ω para los cuales se puede asegurar la convergencia.

b) (8 puntos) Construya las matrices de los sistemas iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel asociadas al sistema. Probar que estos sistemas iterativos convergen en a lo sumo n pasos a la solución del sistema.

Ejercicio 4 (24 puntos). Sea $p_{a,b,c}(x) = ax^2 + bx + c$ la familia de polinomios de grado a lo sumo 2.

a) (7 puntos) Dar dos polinomios que mejor aproximen al punto $(2, 1)$ vía CM y ecuaciones normales.

b) Como además se busca que el polinomio sea lo más 'parecido' a $x^2 + x + 1$, se planteó el siguiente problema de minimización, siendo $p_{a,b,c}(x) = ax^2 + bx + c$:

$$\min_{a,b,c} \left\{ (p_{a,b,c}(2) - 1)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \right\}$$

i) (10 puntos) Reescribir la expresión $(p_{a,b,c}(2) - 1)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2$ como $\|My - d\|_2^2$ siendo $y = (a, b, c)$ y plantear las ecuaciones normales del problema.

ii) (7 puntos) ¿Cuántas soluciones tiene el problema planteado? Justifique.

1] a) El polinomio característico de una matriz $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se define como $p_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_{n\times n})$

Voy a manipularlo algebraicamente empleando la conmutatividad del det y la invertibilidad de A:

$$\underline{p_{AB}(\lambda)} \overset{def}{=} \det(AB - \lambda I_{n\times n}) \overset{A\text{ inv.}}{=} \det(AB - \lambda AA^{-1}) = \det(A(B - \lambda A^{-1}))$$

$$\overset{\text{conmut.}}{=} \det((B - \lambda A^{-1})A) = \det(BA - \lambda A^{-1}A) = \det(BA - \lambda I_{n\times n}) \overset{def}{=} \underline{p_{BA}(\lambda)}$$

¿Bx?

b) $\Leftarrow$ Sea $v \in \mathbb{R}^n$ tq $A^{-1}v \in S_\lambda(BA)$. Entonces, $BA(A^{-1}v) = \lambda(A^{-1}v)$

$\iff Bv = \lambda A^{-1}v \overset{A\text{ inv.}}{\iff} ABv = \lambda AA^{-1}v \iff ABv = \lambda v \overset{def}{\iff} v \in S_\lambda(AB)$.

$\Rightarrow$ Lo mismo en sentido opuesto: sea $v \in S_\lambda(AB)$. Entonces, $ABv = \lambda v$

$\overset{A\text{ inv.}}{\iff} ABv = \lambda AA^{-1}v \overset{A\text{ inv.}}{\iff} Bv = \lambda A^{-1}v \overset{A\text{ inv.}}{\iff} B(AA^{-1})v = \lambda A^{-1}v \iff (BA)(A^{-1}v) = \lambda(A^{-1}v)$

$\therefore A^{-1}v \in S_\lambda(BA)$

El tema es verla como conjunto: A manda 1 a 1 (biyección) por ser invertible

Dado que podemos realizar este proceso para cualquier autovector en AB o BA, necesariamente se mantiene la multiplicidad geométrica de los autovalores (no así la algebraica).

c) En la práctica 5 vimos que una matriz es diagonalizable si y solo si posee una base de autovectores $\{v_1, \dots, v_n\}$, ya que entonces obtenemos la diagonalización $M = PDP^{-1}$ con $P = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

En este caso, si AB es diagonalizable, entonces dicha base $\{v_1, \dots, v_n\}$ existe, y además podemos concluir que la multiplicidad geométrica equivale a la algebraica. Dado que A es invertible, podemos aplicar la transformación $A^{-1}x$ y así obtener $\{A^{-1}v_1, \dots, A^{-1}v_n\}$, la cual es un conjunto L.I. por ser A^{-1} invertible. Además, dichos vectores son autovectores de los mismos autovalores que antes, por ahora por DA. (y en el mismo orden). Con todo esto, podemos concluir que ~~BA~~ todo una diagonalización $AD = PDP^{-1}$ con $P = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \cdots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$, $BA = (A^{-1}P)D(A^{-1}P)^{-1}$ es una diagonalización válida de BA. El razonamiento es simétrico para la vuelta, pasando de $DA = PDP^{-1}$ a $AD = (AP)D(AP)^{-1}$ ya que si $\{A^{-1}v_1, \dots, A^{-1}v_n\}$ es base de autovectores de BA, entonces $\{AA^{-1}v_1, \dots, AA^{-1}v_n\} = \{v_1, \dots, v_n\}$ lo es de AD.

d) Sea E... $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\det(E) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1 \therefore$ E invertible

$P_E(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 \therefore$ los autovalores de E son $\{1, 1\}$.

$S_1(E) = \{v / (E - I)v = \vec{0}\}$, $(E-I)v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \therefore \begin{cases} v_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\therefore S_1(E) = \langle (1,0) \rangle$, con $\dim(S_1(E)) = 1 < 2 \therefore$ E no diagonalizable

A su vez, $P_F(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 \therefore$ los autovalores de F son $\{1, 1\}$.

$S_1(F) = \{v / (F - I)v = \vec{0}\}$, $(F-I)v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \therefore \begin{cases} -v_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\therefore S_1(F) = \langle (1,0) \rangle$, con $\dim(S_1(F)) = 1 < 2 \therefore$ F no diagonalizable

Cumplimos todas las hipótesis. $EF = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2\times 2}$

La identidad es trivialmente diagonalizable, con $P = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ e_1 & e_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore EF = I \cdot I \cdot I^{-1}$

Entonces, hallamos E y F que cumplen lo pedido.

2] 3] Considerando la matriz $Z = v_i \cdot v_j^t$, observo:

$$Z = v_i \cdot v_j^t = \begin{pmatrix}(v_i)_1\\ \vdots \\ (v_i)_m\end{pmatrix} \cdot \left((v_j)_1 \cdots (v_j)_n\right) = \begin{pmatrix} (v_i)_1 \cdot (v_j)_1 & \cdots & (v_i)_1 \cdot (v_j)_n \\ \vdots & & \vdots \\ (v_i)_m \cdot (v_j)_1 & \cdots & (v_i)_m \cdot (v_j)_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Esta matriz, entonces, puede pensarse de la siguiente manera: $Z = \begin{pmatrix} (v_j)_1 \cdot v_i & \cdots & (v_j)_n \cdot v_i \end{pmatrix}$

y también $Z = \begin{pmatrix} \longmapsto (v_i)_1 \cdot v_j^t \longrightarrow \\ \vdots \\ \longmapsto (v_i)_m \cdot v_j^t \longrightarrow \end{pmatrix}$.

Usando la primera escritura, veo que el espacio columna de Z (es decir la imagen) está compuesto por múltiplos del mismo vector $v_i \in \mathbb{R}^m$. Además, como $\|v_j\|_2 = 1$ por formar parte de una base ortonormal, alguno de sus coeficientes es no nulo, y por tanto $\langle v_i \rangle \subseteq Im(Z)$. Como el resto de columnas son L.I D a v_i, no aportan a la imagen. Luego, $\underline{Im(Z) = \langle v_i \rangle}$. ✓

~~Usando la otra escritura;~~ Como v_i no es nulo por formar parte de una base, $dim(Im(Z)) = 1$.

Usando la otra escritura, observo que cualquier $x \in \langle v_j \rangle^\perp$ (es decir, $v_j^t x = 0$) está en el núcleo de Z, ya que:

$$Zx = \begin{pmatrix} \longmapsto (v_i)_1 \cdot v_j^t \longrightarrow \\ \vdots \\ \longmapsto (v_i)_m \cdot v_j^t \longrightarrow \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix}(v_i)_1 \cdot v_j^t \cdot x \\ \vdots \\ (v_i)_m \cdot v_j^t x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(v_i)_1 \cdot 0 \\ \vdots \\ (v_i)_m \cdot 0\end{pmatrix} = \vec{0}_m$$

Luego, $\langle v_j \rangle^\perp \subseteq Nu(Z)$. Como v_j es no nulo, $dim(\langle v_j \rangle^\perp) = n-1$, ya que es el hiperplano en $\mathbb{R}^n$ determinado por v_j. Dado que $dim(Nu(Z)) + dim(Im(Z)) = n$ por el Teorema de la dimensión, $dim(Nu(Z)) = n-1$, y entonces vale la doble inclusión $\boxed{\langle v_j \rangle^\perp = Nu(Z)}$

Podemos expresar esto utilizando el resto de la base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$, ya que ✓ $v_i^t v_j = 0$ si $i \neq j$ por ortogonalidad. Luego, $\boxed{Nu(Z) = \langle v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n \rangle}$

b] Para hallar una descomposición SVD de A, primero analizo AA^t y A^tA, ya que sabemos de la práctica 6 que los autovalores de dicha matriz (que son la misma) se corresponden con los valores singulares de A.

$$A^tA \overset{def}{=} \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i \cdot u_i \cdot v_i^t\right)^t \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} \sigma_j \cdot u_j \cdot v_j^t\right) = \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i \cdot v_i \cdot u_i^t\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{k} \sigma_j \cdot u_j \cdot v_j^t\right)$$

Como $\{u_1,\dots,u_n\}$ es una base ortonormal, al distribuir los vectores solamente "sobreviven" aquellos términos donde $i=j$ ya que $u_i^t u_i = 1$, mientras que $u_i^t \cdot u_j = 0$ con $i \neq j$. Luego,

$=\left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 \cdot v_i \cdot v_i^t\right) = A^tA$. Observemos que, dado $j \leq k$, obtenemos (por el mismo argumento)

$$A^tA\, v_j = \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 \cdot v_i \cdot v_i^t\right)\cdot v_j = \sigma_j^2 \cdot v_j \cdot v_j^t \cdot v_j = \sigma_j^2 \cdot v_j$$

A su vez, con $k < j \leq n$

$$A^tA \cdot v_j = \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 \cdot v_i \cdot v_i^t \cdot v_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 \cdot v_i \cdot 0\right) = \vec{0}_n = 0 \cdot v_j$$

Entonces, los autovalores de A^tA son $\{\sigma_1^2,\dots,\sigma_k^2,\underbrace{0,\dots,0}_{k+1 \,\cdots\, n}\}$, con autovectores asociados $\{v_1,\dots,v_n\}$ respectivamente.

De manera similar, $AA^t \overset{def}{=} \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i \cdot u_i \cdot v_i^t\right)\left(\sum_{j=1}^{k} \sigma_j \cdot u_j \cdot v_j^t\right)^t = \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i \cdot u_i \cdot v_i^t\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{k} \sigma_j \cdot v_j \cdot u_j^t\right)$

$=\left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 \cdot u_i \cdot u_i^t\right)$, y entonces ~~AA~~ con $j \leq k$, $AA^t \cdot u_j = \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 \cdot u_i\, u_i^t\, u_j\right) = \sigma_j^2 \cdot u_j$

y con $k < j \leq m$, $AA^t u_j = \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 \cdot u_i \cdot u_i^t\, u_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 \cdot u_i \cdot 0\right) = \vec{0}_m = 0 \cdot u_j$

Por lo que AA^t tiene autovalores $\{\sigma_1^2,\dots,\sigma_k^2,\underbrace{0,\dots,0}_{k+1 \quad m}\}$, con autovectores asociados $\{u_1,\dots,u_m\}$.

Habiendo observado esto, propongo la factorización SVD $A = U\Sigma V^t$, con

$$U = \begin{pmatrix} \top & & \top \\ u_1 & \cdots & u_m \\ \bot & & \bot \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m},\quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_k & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},\quad V^t = \begin{pmatrix} \longmapsto v_1^t \longrightarrow \\ \vdots \\ \longmapsto v_n^t \longrightarrow \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Observamos que esta factorización cumple todos los requisitos de SVD, ya que Σ tiene los valores singulares de A en orden decreciente, U y V son ortogonales ya que se componen de vectores ortonormales, y vale

2/5

que las columnas de V son autovectores asociados a los respectivos autovalores de A^tA, así como las columnas de U son autovectores asociados a AA^t, por todo lo visto anteriormente. Solo falta ver que este producto efectivamente da A como resultado: (defino $\partial_j = 0$ con $j>k$ por comodidad)

$$U\Sigma V^t = \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_m \\ | & & | \end{pmatrix}}_{m\times m} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \partial_k & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{m\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} \vdash v_1^t \dashv \\ \vdots \\ \vdash v_n^t \dashv \end{pmatrix}}_{n\times n} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ \partial_1 u_1 & \cdots & \partial_m u_m \\ | & & | \end{pmatrix}}_{m\times n} \begin{pmatrix} \vdash v_1^t \dashv \\ \vdots \\ \vdash v_n^t \dashv \end{pmatrix}$$

Recordamos que podemos pensar una multiplicación de matrices de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ \partial_1 u_1 & \cdots & \partial_n u_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdash v_1^t \dashv \\ \vdots \\ \vdash v_n^t \dashv \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \cdot u_i \cdot v_i^t$$

. Recordando que $\partial_j = 0 \ \forall j>k$,

$$= \sum_{i=1}^{k} \partial_i \cdot u_i \cdot v_i^t \overset{def.}{=} A$$

. Luego, $A = U\Sigma V^t$ es una fact. SVD válida.

(P.D.: también vale que los coeficientes en la diagonal de Σ no nulos (osea los valores singulares) son positivos ya que por hipótesis $\partial_1 \geq \cdots \geq \partial_k > 0$) → y están ordenados.

✓ JOVA

c) Como vimos en la práctica 6, dada una fact. SVD de $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_m \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_{r} \, \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdash v_1^t \dashv \\ \vdash v_n^t \dashv \end{pmatrix}$ con $r = rg(A)$,

siempre podemos exhibir $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ como base de $Nu(A)$, ya que $\forall i>r$ vale

$$A\cdot v_i = U\Sigma \begin{pmatrix} \vdash v_1^t \dashv \\ \vdash v_n^t \dashv \end{pmatrix} \cdot v_i \overset{\text{v ortog.}}{=} U\Sigma e_i = U\sigma_i \cdot e_i = 0 \quad \because \sigma_i = 0 \text{ cuando } i>r.$$

~~Además, podemos exhibir $\{u_1, \dots, u_r\}$ como base de $Im(A)$ ya que cada u_i tiene como pre-imagen al v_i (cuando $i\leq r$), ya que $A\cdot v_i = U\Sigma \begin{pmatrix} \vdash v_1^t \dashv \\ \vdash v_n^t \dashv \end{pmatrix} v_i = U\Sigma e = \begin{pmatrix} u_1 \end{pmatrix}$~~

Además, podemos exhibir $\{u_1, \dots, u_r\}$ como base de $Im(A)$, ya que $\forall i\leq r$ la pre-imagen de u_i es $\sigma_i^{-1} v_i$, dado que $A\cdot \sigma_i^{-1} v_i = U\Sigma \sigma_i^{-1} e_i = U\sigma_i \cdot \sigma_i^{-1} \cdot e_i = U\cdot e_i = u_i$

En nuestro caso, $r = rg(A) = k$ ya que por hipótesis $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_k > 0$, por lo que se deduce

$$\boxed{Nu(A) = \langle v_{k+1}, \cdots, v_n \rangle \quad , \quad Im(A) = \langle u_1, \cdots, u_k \rangle}$$

(Claramente estos conjuntos son base ya que son ortonormales y por tanto L.I.)

$Im(A)$ [illegible] solo $\subseteq$, [illegible] ?

3 i) Si el sistema iterativo converge, entonces está bien definido el límite $\lim_{k\to\infty}(x^k) = x^*$.
Por tanto, vale evaluar dicho límite en la ecuación del sistema iterativo y así obtener:

$$x^* = ((1-\omega)I_{n\times n} + \omega R)\cdot x^* + \omega b \iff x^* = (I_{n\times n} - \omega I_{n\times n} + \omega R)x^* + \omega b$$

$$\iff x^* = I_{n\times n}x^* - \omega I x^* + \omega R x^* + \omega b \iff \cancel{x^*} = \cancel{x^*} - \omega x^* + \omega R x^* + \omega b$$

$$\iff \omega x^* - \omega R x^* = \omega b \iff \omega(I_{n\times n} - R)x^* = \omega b \overset{\omega\neq 0}{\iff} (I_{n\times n}-R)x^* = b$$

Como $A = QR$ y Q ortogonal, $R = Q^tA$, y entonces $\underline{(I_{n\times n} - Q^tA)x^* = b}$

Por tanto, el x^* al que converge el método resuelve el sistema planteado.

ii) Como vimos en la práctica 7, asegurar la convergencia del sistema iterativo para un ω dado es equivalente a probar que el radio espectral de la matriz T es menor a 1, con el sistema escrito de la forma $x^{k+1} = Tx^k + c$. En este caso, ya tenemos el sistema escrito de esta manera, con $T = ((1-\omega)I_{n\times n} + \omega R)$.

Dado que R es triangular superior, sabemos que sus autovalores son los coeficientes en la diagonal (ya que al calcular su polinomio característico aprovechamos la estructura triangular superior), y entonces sus autovalores son $\{R_{1,1},\dots,R_{n,n}\}$, que cumplen $R_{n,n}\geq\dots\geq R_{1,1}>1$.

En la práctica 7 vimos que si $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ son los autovalores de una matriz $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$, entonces $\{\alpha\cdot\lambda_1+\beta,\dots,\alpha\cdot\lambda_n+\beta\}$ son los autovalores de $\alpha\cdot C+\beta\cdot I_{n\times n}$.
~~En~~ En este caso, $T = \alpha R + \beta I_{n\times n}$ con $\alpha=\omega$ y $\beta = 1-\omega$.

Si $\omega>0$, entonces $\{\omega R_{1,1}+1-\omega,\dots,\omega R_{n,n}+1-\omega\}$ son los autovalores de T, y cumplen $\omega\cdot R_{n,n}+1-\omega \geq\dots\geq \omega R_{1,1} + 1-\omega > 1\cdot\omega+1-\omega = 1$. En particular, $\omega\cdot R_{n,n}+1-\omega>1$, por lo que $\rho(T) = |\omega R_{n,n}+1-\omega|>1$, y por tanto el esquema iterativo no converge independientemente del vector inicial para ningún ω positivo.

$\boxed{\text{Si } w<0}$, los autovalores de T son los mismos, y ahora cumplen

$w \cdot R_{n,n} + 1 - w \leq \cdots \leq w \cdot R_{1,1} + 1 - w < 1 \cdot w + 1 - w = 1$. Por esta cota, sabemos que los autovalores positivos de T cumplen la propiedad de tener valor absoluto menor a 1.

~~Sin embargo, el radio espectral de T~~ Hacia los autovalores negativos, basta comprobar que el mínimo de todos tiene valor absoluto menor a 1 para concluir que $\rho(T) < 1$.

Luego, como el menor es $w \cdot R_{n,n} + 1 - w$, vemos ~~$\rho(T)$~~

$|wR_{n,n} + 1 - w| < 1 \iff -1 < wR_{n,n} + 1 - w < 1$. La desigualdad derecha es siempre cierta por lo visto anteriormente, por lo que es equivalente a ($R_{n,n} > 1 \to R_{n,n} - 1 > 0$)

$$-1 < wR_{n,n} + 1 - w \iff -2 < w(R_{n,n} - 1) \iff \underbrace{w > -\frac{2}{R_{n,n}-1}}$$

B

Luego, el sistema iterativo converge independientemente del vector inicial cuando $\boxed{-\frac{2}{R_{n,n}-1} < w < 0}$

$\boxed{b}$ Como la matriz asociada al sistema es $I_{n\times n} - R$, tenemos $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \ddots & R \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-R_{1,1} & -R \\ 0 & 1-R_{n,n} \end{pmatrix}$

Por tanto, usando la notación convencional $A' = D - L - U$, tenemos $D = \begin{pmatrix} 1-R_{1,1} & 0 \\ 0 & 1-R_{n,n} \end{pmatrix}$,

$L = \emptyset_{n\times n}$ y $U = \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces, el sistema de Jacobi queda $T_J = D^{-1}(L+U)$

$$= \begin{pmatrix} 1-R_{1,1} & 0 \\ 0 & 1-R_{n,n} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-R_{1,1})^{-1} & 0 \\ 0 & (1-R_{n,n})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A su vez, el sistema de Gauss-Seidel resulta $T_{GS} = (D-L)^{-1} \cdot U \overset{L=\emptyset_{n\times n}}{=} D^{-1} \cdot U = D^{-1}(L+U)$.

Es decir, ambos esquemas son idénticos.

Luego, la expresión completa de ambos esquemas es $\boxed{x^{k+1} = D^{-1} U x^k + D^{-1} b}$

Creo que el sistema converge en a lo sumo n pasos ya que en cada uno se obtiene correctamente un coeficiente de x que soluciona el sistema. NO CONVERGEN

Ejercicio 4, hoja 1/1

4/5

4] a) En el sentido de CM, podemos plantear el problema de la siguiente manera:

Utilizando las funciones $\Phi_1(x) = x^2$, $\Phi_2(x) = x$, $\Phi_3(x) = 1$ y el "conjunto de datos" $\{(2,1)\}$ con un único dato, planteamos A tal que:

$$A = \begin{pmatrix} \Phi_1(x_1) & \Phi_2(x_1) & \Phi_3(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi_1(x_n) & \Phi_2(x_n) & \Phi_3(x_n) \end{pmatrix} \overset{n=1}{\uparrow}{=} \begin{pmatrix} \Phi_1(x_1) & \Phi_2(x_1) & \Phi_3(x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y planteamos al "vector" de resultados $b = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{n=1}{\uparrow}{=} (y_1) = (1)$

Por último, consideramos a los coeficientes que queremos hallar como $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Entonces, buscamos resolver $\min_{X \in \mathbb{R}^3} \{ \|AX - b\|_2^2 \}$, el clásico problema de CM.

Utilizando las Ecuaciones Normales, buscamos solucionar el sistema $A^tAX = A^tb$. Calculamos:

$$A^tA = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^tb = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Buscamos entonces resolver $\begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Con tal de exponer dos soluciones, vemos "a ojo" que $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ solucionan el sistema. Corroboramos:

$$\begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/2 \\ 4/2 \\ 2/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Como X_1 y X_2 satisfacen la Ec. Normales, entonces minimizan CM.

Por tanto, existen como polinomios $\{ f_1(x) = \frac{1}{2}x \;,\; f_2(x) = 1 \}$

b) i) Encontramos la expresión $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, que cumple

$$\|My - d\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} 4a+2b+c \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} P_{abc}(2)-1 \\ a-1 \\ b-1 \\ c-1 \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

$$= (P_{abc}(2)-1)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2.$$

Entonces, las ecuaciones normales resultan $M^tMy = M^td$. Calculamos:

$$M^tM = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 4 \\ 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad M^td = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Luego, la ecuación normal del sistema son

$$\boxed{\begin{pmatrix} 15 & 8 & 4 \\ 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

ii) Como vimos en la práctica 8, la unicidad del problema de CM depende del rango de la matriz asociada (en este caso M). ~~Dado que el rango de M es~~ Observamos que las tres columnas de M son un conjunto LI, ya que es imposible obtener cualquiera como una combinación lineal de las otras dos debido a que cada columna tiene un coeficiente "único" por la identidad. Por ello, el rango de M es 3. En la práctica vimos que si $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tiene $rg(M)$, entonces M^tM es invertible y por tanto $\boxed{\text{el sistema } M^tMy = M^tb \text{ tiene única solución, con } y = (M^tM)^{-1}M^tb.}$