Álgebra I - Segundo cuatrimestre de 2024

Primer Recuperatorio del Segundo Parcial - 10/12/2024

1. Hallar todos los números primos $p \in \mathbb{N}$ tales que
$$p \mid \left((11!)^{p-1} + 220 : 142^{5p} + 40\right).$$

2. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a < 360$, tales que $a^3 \equiv 197 \pmod{360}$.

3. Sea $f = X^5 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

   a) Probar que $f \mid X^{30} - 1$

   b) Hallar el polinomio $g \in \mathbb{R}[X]$ mónico de grado mínimo tal que $f \mid g$.

4. Sea $f = X^6 + X^5 + aX^4 + 2X^3 + aX^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$. Hallar todos los valores de a tales que $f(1) \neq 0$ y f tiene una raíz $\omega \in \mathbb{C}$ que verifica $\omega^3 = 1$. Para cada uno de los valores hallados, factorizar f en $\mathbb{R}[X]$ y en $\mathbb{C}[X]$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

Mariangeles Pardo 46113341 ①

① Hallar todos los p primos $\in \mathbb{N}$ /
$p \mid (\underbrace{(11!)^{p-1} + 220}_{a} : \underbrace{142^{5p} + 40}_{b})$.

$\Rightarrow$) Se que si $p \mid (a:b) \iff p \mid a \wedge p \mid b$.
analizo cada congruencia:

$p \mid a$: $p \mid a \iff a \equiv 0\,(p)$ / $(11!)^{p-1} + 220 \equiv 0\,(p)$,
si $p \nmid (11!)$ puedo usar fermat (luego analizo cuando $p \mid (11!)$)

$\boxed{PTF}$: $(11!)^{p-1} \equiv 1\,(p) \iff$ p primo y $(11! : p) = 1$.
reemplazo: $1 + 220 \equiv 0\,(p) \iff 221 \equiv 0\,(p)$ /
$p = 13$; $p = 17$. Veo si alguno de estos p cumple que $p \mid b$.

$\underline{p=13}$: $\underbrace{142}_{\equiv 12(13)}^{5.13} + \underbrace{40}_{\equiv 1} \equiv 0\,(13) \rightarrow (12^{13})^{5} + 1 \equiv 0\,(13)$

$\boxed{PTF}$: $12^{13} \equiv 12\,(13) \rightarrow 12^{5} + 1 \equiv 0\,(13)$, $12^{2} \equiv 1\,(13)$
$12^{2} \cdot 12^{2} \cdot 12 + 1 \equiv 12 + 1 \equiv 13 \equiv 0\,(13)$ ✓ $\boxed{p = 13}$

$\underline{p=17}$: $(\underbrace{142}_{142 \equiv 6(17)}^{17})^{5} + \underbrace{40}_{\equiv 6(17)} \equiv 0\,(17) \rightarrow (6^{17})^{5} + 6 \equiv 0\,(17)$
$\boxed{PTF}$: $6^{17} \equiv 6\,(17)$

$6^{5} + 6 \equiv 0\,(17) \rightarrow 7776 + 6 \equiv 7 + 6 \equiv 13 \not\equiv 0\,(17)$ X
$\boxed{p \neq 17}$ X

$\Rightarrow$) Ahora me fijo que pasa con los factores de $(11!)$ / los primos que aparecen en su factorización son: $p=2$, $p=3$, $p=5$, $p=7$, $p=11$. Me fijo cada uno

$\underline{p=2}$: $\underbrace{(11!)}^{2-1} + 220 \equiv 0(2)$ ^ $(\underbrace{142}^{2})^5 + 40 \equiv 0(2)$

11! contiene a 2, así que es $\equiv 0(2)$, $220 \equiv 0(2)$

$142 \equiv 0(2)$ y $40 \equiv 0(2)$

Conclusión, 2 divide a ambas expresiones

$\boxed{p=2}$ ✓

✓

$\underline{p=3}$: $\underbrace{(11!)}^{3-1} + \underbrace{220}_{\equiv 1} \equiv 0(3)$ ^ $(142^3)^5 + 40 \equiv 0(3)$

contiene a 3 así que el resto es 0 mod. 3.

Como $3 \nmid a$, $3 \nmid (a:b)$ así que no analizo si $3|b$ y

me queda $0+1 \not\equiv 0(3)$ concluyo que $\boxed{p \neq 3}$ ✗ ✓

$\underline{p=5}$: $\underbrace{(11!)}^{5-1} + \underbrace{220}_{} \equiv 0(5)$ ^ $(\underbrace{(142)^5}_{\equiv 2(5)})^5 \underbrace{+40}_{\equiv 0(5)} \equiv 0(5)$ $\equiv 2(5)$

contiene al 5, $220 \equiv 0(5)$ su resto es 0 , $5|a$ ✓

queda $2 + 40 \equiv 42(5)$

$2^5 \equiv 2 \rightarrow (2^5)^5 \equiv 2(5)$ y $42 \not\equiv 0(5)$

$\boxed{p \neq 5}$ ✗ ✓

$\underline{p=7}$: $\underbrace{(11!)}^{7-1} + \underbrace{220}_{\equiv 3} \equiv 0(7)$ ^ $(142^7)^5 + 40 \equiv 0(7)$

contiene a 7 es congruente a 0 mod. 7.

$\Rightarrow 0+3 \not\equiv 0(7)$ ✓, como $7 \nmid a$ tampoco $7 \nmid (a:b)$, $\boxed{p \neq 7}$

✓

$\underline{p=11}$: $\underbrace{(11!)}_{\equiv 0(11)}^{11-1} + \underbrace{220}_{\equiv 0(11)} \equiv 0(11)$

$(\underbrace{142}^{11})^5 + \underbrace{40}_{\equiv 7(11)} \equiv 0(11)$

$10^{11} \equiv 10(11)$

$10^5 + 7 \not\equiv 0(11)$

✓

$\boxed{p \neq 11}$ ✗

$\boxed{p \neq 11}$ ✗

Los p primos $\in \mathbb{N}$ que cumplen son $p=13$ y $p=2$

$p|(a:b)$

Mari angeles Pardo ②
46113741

resto / $0 \leq r < d$

② Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ / $\overbrace{0 \leq a < 360}$ /
$a^3 \equiv 197\ (360)$

$\Rightarrow$) Comienzo factorizando a 360 /
$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. / 8, 9 y 5 son coprimos 2 a 2 /

$a^3 \equiv 197 (360) \underset{\boxed{TCR}}{\longleftrightarrow} \begin{cases} a^3 \equiv 197 (8) & ① \\ a^3 \equiv 197 (9) & ② \\ a^3 \equiv 197 (5) & ③ \end{cases}$

Planteo congruencia con los modulos /

① $\Rightarrow$) $a^3 \equiv 197 (8) \rightarrow a^3 \equiv 5 (8)$ ¿Cuando a^3 es congruente a 5 módulo 8?

a	0	1	2	3	4	5	6	7 (8)
a^2	0	1	4	1	0	1	4	1
a^3	0	1	0	3	0	5	0	7

solo pasa cuando [$a \equiv 5 (8)$ //

② $\Rightarrow$) $a^3 \equiv 197 (9) \rightarrow a^3 \equiv 8 (9)$ ¿Cuando pasa $a^3 \equiv 8(9)$?

a	0	1	$\boxed{2}$	3	4	$\boxed{5}$	6	7	$\boxed{8}$ (9)
a^3	0	1	$\boxed{8}$	0	1	$\boxed{8}$	0	1	$\boxed{8}$

pasa cuando $a \equiv 2 (9)$, $a \equiv 5 (9)$ y $a \equiv 8 (9)$.

③ $\Rightarrow$) $a^3 \equiv 197 (5) \rightarrow a^3 \equiv 2 (5)$

a	0	1	2	$\boxed{3}$	4 (5)
a^3	0	1	3	$\boxed{2}$	4

pasa solo cuando [$a \equiv 3 (5)$

$\Rightarrow$ Juntando todo me queda que: $a \equiv 5(8)$, $a \equiv 3(5)$ y (A) $a \equiv 2(9)$, (B) $a \equiv 5(9)$, (C) $a \equiv 8(9)$, voy a plantear 3 sistemas que van a ser equivalentes al original teniendo las mismas soluciones.

(Las sols. de A,B,C son las sols del original)

(A)

$\begin{cases} a \equiv 3(5) \\ a \equiv 5(8) \\ a \equiv 2(9) \end{cases}$

$\delta_1 \begin{cases} a \equiv 3(5) \\ a \equiv 0(72) \end{cases}$ $a = 72k$, $\underset{\equiv 2(5)}{72}k \equiv 3(5) \to 2k \equiv 3(5)$, $2 \perp 5$ sigue (A)

(A) $\Rightarrow k \equiv 4(5)$ ✓ $[a = 72 \cdot 4 = 288$ (360)

$\delta_2 \begin{cases} a \equiv 5(8) \\ a \equiv 0(45) \end{cases}$ $a = 45k$, $45k \equiv 5(8) \Leftrightarrow 5(9)k \equiv 5 \cdot 1(8)$

$45 \perp 8$ y $c \cdot a \equiv c \cdot b(d) \Leftrightarrow a \equiv b(d)$ cuando $c \perp d$

$\Rightarrow \underset{\equiv 1(8)}{9}k \equiv 1(8) \Rightarrow k \equiv 1(8)$

$[a \equiv 45$ (360)

$\delta_3 \begin{cases} a \equiv 2(9) \\ a \equiv 0(40) \end{cases}$ $a = 40k$

$40k \equiv 2(9)$

$40 \perp 9 \to 2(20)k \equiv 1 \cdot 2(9) \Leftrightarrow 20k \equiv 1(9) \to 2k \equiv 1(9) \to k \equiv 5(9)$, $2 \perp 9$

$[a = 40 \cdot 5 = 200$.

$a \equiv 288 + 45 + 200 (360) \to a \equiv 533 (360)$ $533 = 360 \cdot 1 + 173$

solución de (A): $[a \equiv 173 (360)]$ ✓ Busco que $0 \leq r < d$.

(B) $\begin{cases} a \equiv 3(5) \\ a \equiv 5(8) \\ a \equiv 5(9) \end{cases}$

$\delta_1 \begin{cases} a \equiv 3(5) \\ a \equiv 0(72) \end{cases}$

$a = 72k$, $72k \equiv 3(5)$

$72 \equiv 2(5) \to 2k \equiv 3(5)$

$2 \perp 5 \to k \equiv 4(5)$

$[a = 72 \cdot 4 = 288$

$\delta_2 \begin{cases} a \equiv 5(8) \\ a \equiv 0(45) \end{cases}$

$a = 45k$ $45k \equiv 5(8)$

$5 \cdot 9k \equiv 5 \cdot 1(8) \Leftrightarrow 9k \equiv 1(8)$ $9 \perp 8$

$5 \perp 8$

$k \equiv 1(8)$, $[a = 45$

$\delta_3 \begin{cases} a \equiv 5(9) \\ a \equiv 0(40) \end{cases}$ $a = 40k$, $40k \equiv 5(9)$ $5 \cdot 8k \equiv 5 \cdot 1(9) \Leftrightarrow 8k \equiv 1(9)$ $9 \perp 5$ $8 \perp 9$

$k \equiv 8(9)$ $[a = 40 \cdot 8 = 320$.

$a = 288 + 45 + 320 (360)$, $a \equiv 653 (360)$ $653 = 360 + 293$

$[a \equiv 293 (360)]$ s.c. de (B) ✓

(3)

Mariangeles Pardo
46113345

$\Rightarrow$) continuación de (2) : $\begin{cases} a \equiv 3(5) \\ a \equiv 5(8) \\ a \equiv 8(9) \end{cases}$

c)

$S_1 \begin{cases} a \equiv 3(5) \\ a \equiv 0(72) \end{cases}$

$a = 72k$, $\overbrace{72}^{\equiv 2(5)} k \equiv 3(5)$

$2k \equiv 3(5) \Leftrightarrow k \equiv 4(5)$ $\quad 5 \perp 2$

$\{a = 72 \cdot 4 = 288$

$S_2 \begin{cases} a \equiv 5(8) \\ a \equiv 0(45) \end{cases}$

$a = 45k$ $\quad 45k \equiv 5(8)$

$5 \cdot 9k \equiv 5 \cdot 1(8) \Leftrightarrow 9k \equiv 1(8)$ $\quad 8 \perp 5$

$\Leftrightarrow k \equiv 1(8)$ $\{a = 45$ $\quad 9 \perp 8$

$S_3 \begin{cases} a \equiv 8(9) \\ a \equiv 0(40) \end{cases}$

$a = 40k$, $40k \equiv 8(9)$

$8 \cdot 5k \equiv 8 \cdot 1(9)$ $\quad 8 \perp 9$

$\Leftrightarrow 5k \equiv 1(9)$ $\quad 5 \perp 9$

$\Leftrightarrow k \equiv 2(9)$

$a = 40 \cdot 2 = 80$

$a \equiv 288 + 45 + 80 \equiv 413 \ (360)$

$413 = 360 \cdot 1 + \underline{53}$, c) $a \equiv 53(360)$ //

Todos los $a \in \mathbb{Z}$ entre $0 \leq a < 360$

son $a \equiv 173(360)$ (cuando $a \equiv 2(9)$), $a \equiv 293(360)$ (cuando $a \equiv 5(9)$) y $a \equiv 53(360)$ (cuando $a \equiv 8(9)$)

O sea $a = 173$, $a = 293$ y $a = 53$!!

Mariangeles Pardo 96113341 (4)

⇒) (4) continuación: $a=3$ y $g = x^4 + 2x^2 + 1$

~~Sigo factorizando g. Busco sus raíces por gauss / $p = a_0 = -5$ / $\frac{p}{q} = \{\pm 1, \pm 5\}$ /~~
~~$q = a_4 = 1$~~
~~veo cual divide por Ruffini /~~
~~1 0 -4 6 -5~~

⇒) Noto que $g = (x^2)^2 + 2(x^2) + 1$, si hago un cambio de variable / $x^2 = y$, $y^2 + 2y + 1$, busco raíces por Bhaskara / $y_1, y_2 = \frac{-2 \pm \omega}{2}$ con $\omega^2 = (2)^2 - 4.1.1$

⇒) $\omega^2 = 4 - 4 \Rightarrow \omega = 0$ o sea me queda que -1

$\frac{-2 \pm 0}{2} = -\frac{2}{2} = -1$) $y_1 = -1$ y $y_2 = -1$ es raíz cuadrada /

$x^2 = -1$, $g(x) = (-1)^2 + 2.(-1) + 1 = -2 + 2 = 0$ /

o sea -1 es raíz doble de g / $x^2 + 1 = 0$

$\underbrace{(x^2+1)}_{h} \mid g$ /

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + 2x^2 + 1 & x^2 + 1 \\
\hline
-(x^4 + x^2) & x^2 + 1 \\
\quad x^2 + 1 & \\
-(x^2 + 1) & \\
\quad 0 &
\end{array}
$$

(verifico)

(x^2+1) es de multiplicidad doble. / $(x^2+1)^2$ //

Ya puedo factorizar en $\mathbb{R}[x]$ ya que (x^2+1) y (x^2+x+1) son ambos polinomios de grado 2 irreducibles en $\mathbb{R}[x]$ /

factorización en $\mathbb{R}[x]$: $f = (x^2+x+1).(x^2+1)^2$.

$-3+a+1$
$a-2$

$2-a+1=3-a$
$a-a+1$

(4) Sea $f = x^6+x^5+ax^4+2x^3+ax^2+x+1 \in \mathbb{R}[x]$
Hallar todos los valores de a / $f(1)\neq 0$ y f tiene una raíz $\omega \in \mathbb{C} / \omega^3=1$.
Factorizar en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$.

$\Rightarrow$) f tiene una raíz $\omega / \omega^3=1$, o sea $\omega \in G_3$, sé que G_3 tiene al 1, pero por enunciado, $f(1)\neq 0$, luego las únicas 2 posibilidades de raíces en G_3 son:

$\omega_0=1$, no es raíz. $\omega_1 = e^{\frac{2\pi}{3}}$ $\quad \omega_2 = e^{\frac{4}{3}\pi}$ $\therefore$ 2° cuadrante

con $\{e^{\frac{2k\pi}{3}} / 0 \leq k \leq 2\}$

$\omega_1 = e^{\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $\omega_2 = e^{\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 3° cuadrante (porque estoy en $\mathbb{R}$)

O sea, básicamente, voy a tener a ω_1 y $\overline{\omega_1}=\omega_2$ los multiplico para que esté en $\mathbb{R}[x]$ /

$(x-(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i))(x-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)) = x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = [\underbrace{x^2+x+1}_{=g}$

Sé que $g | f$ divido /

$x^6+x^5+ax^4+2x^3+ax^2+x+1 \;\underline{|\, x^2+x+1}$
$\qquad x^4+(a-1)x^2+(3-a)x+(a-2)$

$-(x^6+x^5+x^4)$

$(a-1)x^4+2x^3+ax^2+x+1$

$-((a-1)x^4+(a-1)x^3+(a-1)x^2)$

$(3-a)x^3+1x^2+x+1$

$-((3-a)x^3+(3-a)x^2+(3-a)x)$

$(a-2)x^2+(a-2)x+1$

$-((a-2)x^2+(a-2)x+(a-2))$

$1-a+2$

(A)

(A) como $g | a$, el resto es 0 / $3-a=0 \Leftrightarrow \boxed{a=3}$

Reemplazo / $a=3$

$g = x^4+2x^2+1$ ✓

Hay que ver que para $a=3$, no divide, porque si no no habría sol.

Mariangeles Pardo
46113345

1 7 13 19 . 25 ⑤

③ Sea $f = x^5 - (\overbrace{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}^{z})$.

a) Probar que $f \mid (x^{30} - 1)$

~~b) Prescribo z / ... $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ... con~~

$\Rightarrow (x^{30} - 1) = h$, ¿cuales son las raices de h?

$h = x^{30} - 1 = 0$ $\left[x^{30} = 1 \right.$ las raices de h $\in G_{30}$ / $G_{30} = \{ e^{\frac{2k\pi}{30}}$ con $0 \leq k \leq 29 \}$ ✓

De la misma forma, igualo f a 0 /

$x^5 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = 0 \iff \underbrace{x^5}_{z_1} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}_{z_2}$ igualo numeros complejos para ver las raices / igualo sus modulos y argumentos.

$z_1 : \begin{cases} |z_1| = x^5 \\ \arg(z_1) = \theta . 5 \end{cases}$ $z_2 : \begin{cases} |z_2| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1 \\ \arg(z_2) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} x^5 = 1 \to x = 1 \\ 5\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \to \theta = \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5} \end{cases}$, saco π de factor comun

$0 \leq \frac{\frac{1}{3} + 2k}{5} < 2k \to 0 \leq \frac{1}{3} + 2k < 10k \to -\frac{1}{3} \leq 2k < \frac{29}{3} k$

$\underbrace{-\frac{1}{6}}_{0} \leq k < \underbrace{\frac{29}{6}}_{4,8}$ / $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ las 5 raices de f /

$\left[k_0 = e^{\frac{1}{15} i} \right.$ $\left[k_2 = e^{\frac{13}{15} i} \right.$ $\left[k_4 = e^{\frac{5}{3} i} \right.$

$\left[k_1 = e^{\frac{7}{15} i} \right.$ $\left[k_3 = e^{\frac{19}{15} i} \right.$

↓

$\Rightarrow e^{\frac{1}{15}\pi i}, e^{\frac{7}{15}\pi i}, e^{\frac{13}{15}\pi i}, e^{\frac{19}{15}\pi i}$ y $e^{\frac{5}{3}\pi i}$ son las raíces de f, pero, también de $\underline{h}$ ✓
(Estando) en G_{30} / $e^{\frac{2j\pi}{30}i}$ con j entero y $\geq$ 0 (coprimo)

- Si $j=1$, $e^{\frac{2}{30}\pi i} = e^{\frac{1}{15}\pi i} = k_0$
- Si $j=7$, $e^{\frac{14}{30}\pi i} = e^{\frac{7}{15}\pi i} = k_1$
- Si $j=13$, $e^{\frac{26}{30}\pi i} = e^{\frac{13}{15}\pi i} = k_2$
- Si $j=19$, $e^{\frac{38}{30}\pi i} = e^{\frac{19}{15}\pi i} = k_3$
- Si $j=25$, $e^{\frac{50}{30}\pi i} = e^{\frac{5}{3}i\pi} = k_4$

$\Bigg\}\ f \in G_{30}$ ✓

O sea, todas las raíces de f se encuentran en G_{30}, y como h sería el polinomio "asociado" a G_{30}, a $f \mid h$ ✓

Si tengo que cada raíz de f de la forma $(x-k_n) \mid h$, entonces
$(x-k_0)(x-k_1)(x-k_2)(x-k_3)(x-k_4) \mid h$ ✓
que es f factorizado. ✓

b) $g \in \mathbb{R}[x]$ mónico gr mínimo / $f \mid g$.

$\Rightarrow$ trato de buscar un polinomio g en $\mathbb{R}[x]$ que sea divisible por f, o sea en un principio va a tener que tener las raíces de f, pero como $g \in \mathbb{R}[x]$ y las raíces de g son complejas, entonces voy a tener al conjugado, o sea, cada raíz $k_0 = e^{\frac{1}{15}\pi i}$ va a ser de multiplicidad 2 /

$g = (x - e^{\frac{5}{3}\pi i})^2 (x - e^{\frac{19}{15}\pi i})^2 (x - e^{\frac{13}{15}\pi i})^2 (x - e^{\frac{7}{15}\pi i})^2 (x - e^{\frac{1}{15}\pi i})^2$

No, sólo tenés los conjugados, o sea $e^{-\frac{1}{15}i\pi}$, etc.