Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Primer Recuperatorio del Segundo Parcial (09/12/2024) - 2do. Cuatrimestre 2024

1	2	3	4	Nota
B	B	B	B	10 (diez)

TEMA 2

Apellido: De Luca Nro. de libreta: 4/24 Nro de práctica: 1

Nombre: Santiago Manuel Carrera: Lic. en Ciencias de Datos

1. Sea f una función de clase C^2 tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(0,1)$ es

$$P(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - xy + y^2 + x + 7,$$

y sea

$$g(x,y) = 3x^2y + x^2 + e^{f(x,y)-8} - 2y.$$

Analizar si $g(x,y)$ posee un extremo local en $(0,1)$.

2. Encontrar, si existen, los extremos absolutos de $f(x,y) = x^3 - y^2$ restringida a la región

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1,\ y \geq \sqrt{2}x\}.$$

3. Analizar la convergencia de las integrales:

a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{e^{3x-3}-1}{\sqrt{x-1}}\,dx.$

b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(e^{x^2})+1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}\,dx.$

4. Calcular

$$\iiint_D \frac{y}{(x^2+z^2)^2+1}\,dV,$$

siendo

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 1 \leq x^2+z^2 \leq 16,\ z \leq x\ ,\ 0 \leq y \leq \sqrt{x^2+z^2}\}.$$

Escribir todos los razonamientos que justifican las respuestas.

1. $P(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - xy + y^2 + x + 7$ es el polinomio de Taylor de orden 2 en el $(0,1)$ de f, entonces sé que:

- $P(0,1) = f(0,1)$
- $P_x(0,1) = f_x(0,1)$
- $P_y(0,1) = f_y(0,1)$
- $P_{xx}(0,1) = f_{xx}(0,1)$
- $P_{yy}(0,1) = f_{yy}(0,1)$
- $P_{xy}(0,1) = f_{xy}(0,1)$

Aclaración: Como f es C^2 entonces $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$

Busco estos valores porque los necesitaré para analizar g.

$P(0,1) = 0 - 0 + 1 + 0 + 7 = 8$
$\Rightarrow f(0,1) = 8$

$P_x(x,y) = x - y + 1 \Rightarrow P_x(0,1) = 0 - 1 + 1 = 0$
$\Rightarrow f_x(0,1) = 0$

$P_y(x,y) = -x + 2y \Rightarrow P_y(0,1) = -0 + 2 = 2$
$\Rightarrow f_y(0,1) = 2$

$P_{xx}(x,y) = 1 \Rightarrow P_{xx}(0,1) = 1 \Rightarrow f_{xx}(0,1) = 1$
$P_{yy}(x,y) = 2 \Rightarrow P_{yy}(0,1) = 2 \Rightarrow f_{yy}(0,1) = 2$
$P_{xy}(x,y) = -1 \Rightarrow P_{xy}(0,1) = -1 \Rightarrow f_{xy}(0,1) = -1$

Si $(0,1)$ es extremo local de g entonces es punto crítico (PC) de g. Veo si esto es así:

$(0,1)$ es PC de g si y solo si $\nabla g(0,1) = (0,0)$ ó $\nexists \nabla g(0,1)$

g es una función C^2 por ser suma y composición de funciones $C^2 \Rightarrow \exists \nabla g(x,y)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Busco $\nabla g(0,1) = (g_x(0,1), g_y(0,1))$

NOTA

$g_x(x,y) = 6xy + 2x + e^{f(x,y)-8} \cdot f_x(x,y)$

$\Rightarrow g_x(0,1) = 0 + 0 + e^{f(0,1)-8} \cdot f_x(0,1)$

$= e^{8-8} \cdot 0 = 0$

$g_y(x,y) = 3x^2 + e^{f(x,y)-8} \cdot f_y(x,y) - 2$

$\Rightarrow g_y(0,1) = 0 + e^{f(0,1)-8} \cdot f_y(0,1) - 2$

$= e^{0} \cdot 2 - 2 = 0$

$\Rightarrow \nabla g(0,1) = (g_x(0,1), g_y(0,1)) = (0,0)$

$\therefore$ $(0,1)$ es PC de $g(x,y)$

Para ver si $(0,1)$ es máximo local, mínimo local o punto silla de g usaré el criterio del Hessiano:

$(g$ es $C^2 \Rightarrow g_{xy}(x,y) = g_{yx}(x,y))$

Necesito $Hg(0,1) = \begin{pmatrix} g_{xx}(0,1) & g_{xy}(0,1) \\ g_{xy}(0,1) & g_{yy}(0,1) \end{pmatrix}$

$g_{xx}(x,y) = 6y + 2 + e^{f(x,y)-8} \cdot (f_x(x,y))^2 + e^{f(x,y)-8} \cdot f_{xx}(x,y)$

$\Rightarrow g_{xx}(0,1) = 6 + 2 + e^{f(0,1)-8} \cdot (f_x(0,1))^2 + e^{f(0,1)-8} \cdot f_{xx}(0,1)$

$= 8 + e^{0} \cdot 0 + e^{0} \cdot 1$

$= 9$

$g_{yy}(x,y) = e^{f(x,y)-8} \cdot (f_y(x,y))^2 + e^{f(x,y)-8} \cdot f_{yy}(x,y)$

$\Rightarrow g_{yy}(0,1) = e^{f(0,1)-8} \cdot (f_y(0,1))^2 + e^{f(0,1)-8} \cdot f_{yy}(0,1)$

$= e^{0} \cdot 4 + e^{0} \cdot 2 = 6$

$g_{xy}(x,y) = 6x + e^{f(x,y)-8} \cdot f_y(x,y) \cdot f_x(x,y) + e^{f(x,y)-8} \cdot f_{xy}(x,y)$

$\Rightarrow g_{xy}(0,1) = 0 + e^{f(0,1)-8} \cdot f_y(0,1) \cdot f_x(0,1) + e^{f(0,1)-8} \cdot f_{xy}(0,1)$

$= e^{0} \cdot 2 \cdot 0 + e^{0} \cdot (-1) = -1$

$\therefore Hg(0,1) = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det(Hg(0,1)) = 9 \cdot 6 - 1 = 53 > 0$ y $g_{xx}(0,1) = 9 > 0$

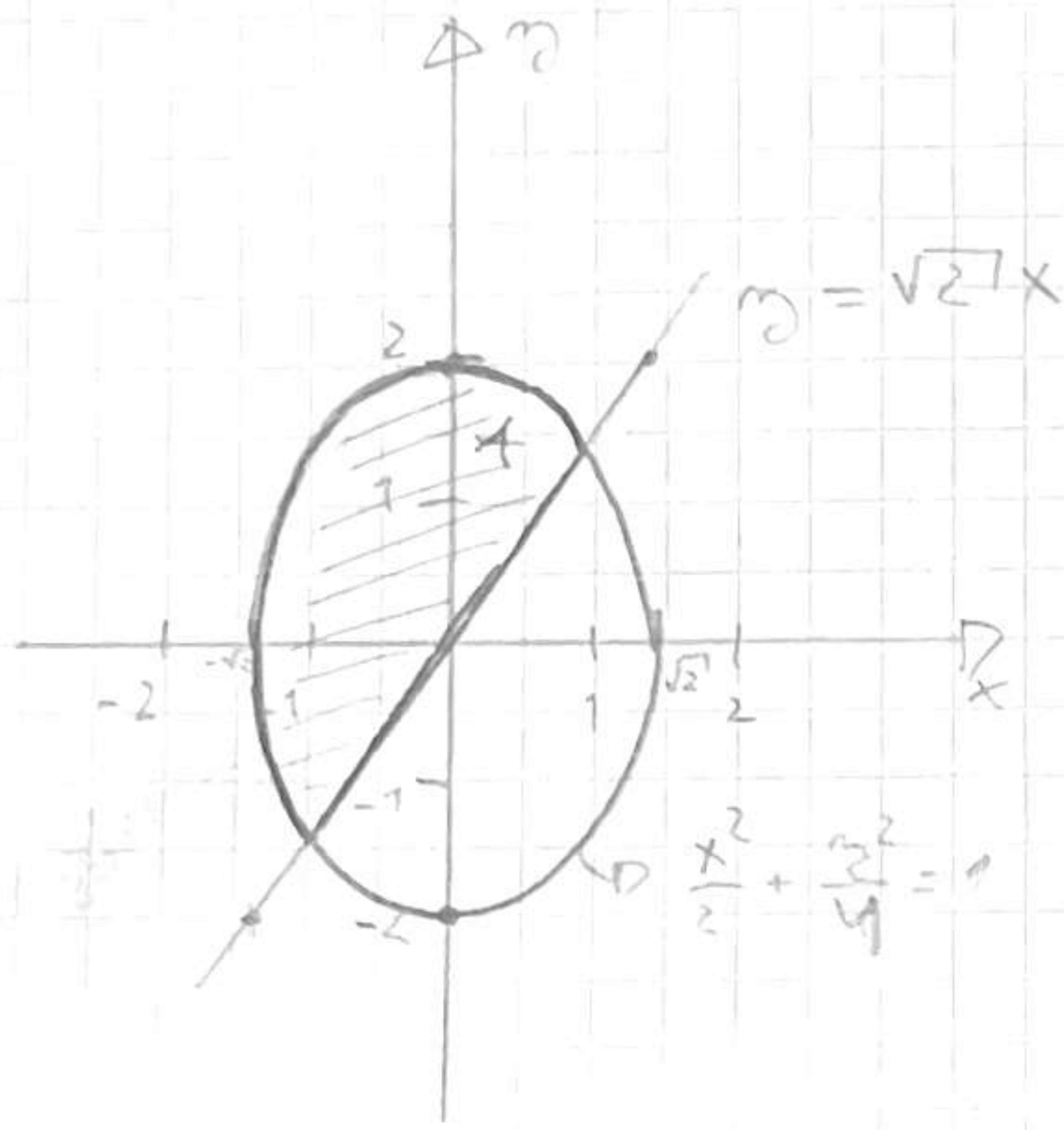
$\therefore$ $\boxed{(0,1) \text{ es mínimo local de } g \text{, es decir, extremo local de } g}$

NOTA RT+

2. $f(x,y) = x^3 - y^2$

$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1, \ y \geq \sqrt{2}\,x \}$

Grafico A:



Busco la intersección:

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1 \wedge y = \sqrt{2}\,x$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4} \cdot 2x^2 = 1$

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 = 1$

$x^2 = 1$

$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = \sqrt{2}$

o $x = -1 \Rightarrow y = -\sqrt{2}$

$(1, \sqrt{2}), (-1, -\sqrt{2})$ son los puntos de intersección.

Como A es una región cerrada y acotada (compacta) y f es una función continua en $\mathbb{R}^2$ por ser un polinomio (en particular, continua en A), vale el teorema de Weierstrass que me asegura que f alcanza máximos y mínimos absolutos en A.

$\Rightarrow$ Busco PC de $f|_A$ y armo tabla de valores para decidir máximos y mínimos.

En el interior de A:

(x,y) es PC de f si y solo si $\nexists \nabla f(x,y)$ o ~~...~~

$\nabla f(x,y) = (0,0)$

f es C^3 por ser polinomio $\Rightarrow \exists \nabla f(x,y) \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (3x^2, -2y)$

$(3x^2, -2y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

pero $(0,0) \notin \text{int}(A)$ porque ~~esta~~ en el borde de $y = \sqrt{2}\,x$

En el borde de $y = \sqrt{2}\,x$:

Llamo $\alpha(t) = (t, \sqrt{2}\,t)$, $t \in [-1, 1]$

($t \in [-1,1]$ sale de la intersección calculada al principio)

Llamo $g(t) = f \circ \alpha(t) = f(t, \sqrt{2}\,t)$, $t \in [-1, 1]$

$= t^3 - 2t^2$

Busco PC de $g(t)$:

I) $g(t)$ es derivable en $\mathbb{R}$ por ser polinomio

II) $g'(t) = 3t^2 - 4t = t(3t-4)$

$\Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ó $t = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha(0) = (0,0) = P_1 \\ \alpha\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right) \notin A \; P_2 \end{array}\right\}$ son PC de $f|_A$

III) $\left.\begin{array}{l} \alpha(-1) = (-1, -\sqrt{2}) = P_3 \\ \alpha(1) = (1, \sqrt{2}) = P_4 \end{array}\right\}$ son PC de $f|_A$ por ser los extremos del intervalo de t

En el borde $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$:

Pienso este borde como los puntos de la curva de nivel 1 de la función $h(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2$ que verifican $y \geq \sqrt{2}\,x$.

Uso el método de Multiplicadores de Lagrange:

I) $\exists \nabla f(x,y)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ porque f ~~es polinomio~~ no sabes quién es f.

II) $h(x,y)$ es $C^1\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ porque es polinomio

III) $\nabla h(x,y) = (h_x(x,y), h_y(x,y)) = (x, \frac{1}{2}y)$

$\Rightarrow \nabla h(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

pero $h(0,0) = 0 \neq 1$ no cumple con mi restricción. $\checkmark$

IV) Busco (x,y) $y\ \lambda \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla h(x,y) \\ h(x,y) = 1 \\ y \geq \sqrt{2}\, x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x^2, -2y) = \lambda (x, \frac{1}{2} y) \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1 \\ y \geq \sqrt{2}\, x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = \lambda x & (1) \\ -2y = \frac{1}{2}\lambda y & (2) \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1 & (3) \\ y \geq \sqrt{2}\, x & (4) \end{cases}$$

Si $x = 0$:

(3) $\frac{1}{4}y^2 = 1$

$y^2 = 4 <$ $y = 2 \Rightarrow$ (4) $2 \geq 0$ $\checkmark$ $\Rightarrow \lambda = -4$

$y = -2 \Rightarrow$ (4) $-2 \geq 0$ ABS

$\Rightarrow P_5 = (0, 2)$ es PC $\checkmark$

Si $y = 0$:

(3) $\frac{1}{2}x^2 = 1$

$x^2 = 2 <$ $x = \sqrt{2} \Rightarrow$ (4) $0 \geq 2$ ABS

$x = -\sqrt{2} \Rightarrow$ (4) $0 \geq -2$ $\checkmark$ $\Rightarrow \lambda = \frac{6}{-\sqrt{2}}$

$\Rightarrow P_6 = (-\sqrt{2}, 0)$ es PC $\checkmark$

Si $x \neq 0, y \neq 0$:

(2) $-2y = \frac{1}{2}\lambda y$

$-2 = \frac{1}{2}\lambda$

$-4 = \lambda \Rightarrow$ (1) $3x^2 = -4x$

$3x = -4$

$\boxed{x = -\frac{4}{3}} \Rightarrow$ (3) $\frac{1}{2} \cdot \frac{16}{9} + \frac{1}{4}y^2 = 1$

$y^2 = \frac{4}{9}$

$\uparrow$

$\frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{9}$

$\uparrow$

NOTA

$y^2 = \frac{4}{9}$
$y = \frac{2}{3} \Rightarrow (4)\ \frac{2}{3} \geq -\frac{4}{3}\sqrt{2}$ ✓ ~~⇒ A = 4~~
$y = -\frac{2}{3} \Rightarrow (4)\ -\frac{2}{3} \geq -\frac{4}{3}\sqrt{2} \simeq -1{,}88$ ✓

$\Rightarrow \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = P_7$

$\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) = P_8$ ✓

En la intersección de los bordes:

son P_3 y P_4 ya incluidos entre los PC.

∴ Armo tabla de valores y decido máximos y mínimos:

PC	f(PC)
$(0,0)$	$0 \to$ máximo
$\left(\frac{4}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right) \notin A$	$\frac{64}{27} - \frac{32}{9} = -\frac{32}{27} \simeq -1{,}185$
$(-1, -\sqrt{2})$	$-1 - 2 = -3$
$(1, \sqrt{2})$	$1 - 2 = -1$
$(0, 2)$	$0 - 4 = -4 \to$ mínimo
$(-\sqrt{2}, 0)$	$-2\sqrt{2} \simeq -2{,}82$
$\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$	$-\frac{64}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{76}{27} \simeq -2{,}81$
$\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{64}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{76}{27} \simeq -2{,}81$

∴ $\boxed{\begin{array}{l}(0,0) \text{ es máximo absoluto de } f|_A \\ (0,2) \text{ es mínimo absoluto de } f|_A\end{array}}$ RTA

3. a) $\int_1^3 \frac{e^{3x-3}-1}{\sqrt{x-1}}\, dx$

sospecho que converge, acoto el integrando que llamo $f(x) = \frac{e^{3x-3}-1}{\sqrt{x-1}}$

Por mi intervalo de integración sé que:

$x \leq 3$

$3x \leq 3 \cdot 3$

$3x-3 \leq 9-3$

$3x-3 \leq 6$ y $e^6 \simeq 403{,}428 \leq 404$

$\Rightarrow f(x) = \frac{e^{3x-3}-1}{\sqrt{x-1}} \leq \frac{e^6-1}{\sqrt{x-1}} \leq \frac{404-1}{\sqrt{x-1}} = \frac{403}{\sqrt{x-1}} = g(x)$

y $\int_1^3 \frac{403}{\sqrt{x-1}}\, dx = 403 \cdot \underbrace{\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx}$

converge por ser integral P con $P = 1/2$
y ser del estilo $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^P}\, dx$

$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq g(x)$ y $\int_1^3 g(x)\, dx$ converge

$\therefore$ Por comparación $\int_1^3 f(x)\, dx$ converge

es decir $\boxed{\int_1^3 \frac{e^{3x-3}-1}{\sqrt{x-1}}\, dx \text{ converge}}$ RTA

b) $\int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(e^{x^2})+1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}\, dx$

sospecho que diverge, acota el integrando que llamo $f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(e^{x^2})+1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}\, dx$

NOTA

Se que:

$$x \geq x-1 \geq 0$$ vale porque $x \geq 2$ en mi intervalo de integración $\Rightarrow x-1 \geq 1$, $x \geq 1$

$$x^2 \geq (x-1)^2$$ No cambia la traza porque $(x-1)^2 \geq 0$

$$\frac{1}{(x-1)^2} \geq \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \overset{*}{\geq} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Por otro lado, $\operatorname{sen}^2(e^{x^2}) \overset{*}{\geq} 0$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(e^{x^2})+1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}} \overset{*}{\geq} \frac{0+1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}} \overset{*}{\geq} \frac{1}{\sqrt[3]{x \cdot x^2}} = \frac{1}{x} = g(x)$$

y $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge por ser ~~serie~~ integral P con $P=1$ e irse a $+\infty$.

$\Rightarrow 0 \leq g \leq f$ y $\int_2^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge

$\therefore$ Por comparación, $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge

es decir, $\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(e^{x^2})+1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}\,dx \text{ diverge.}}$ RTA

Santiago De Luca

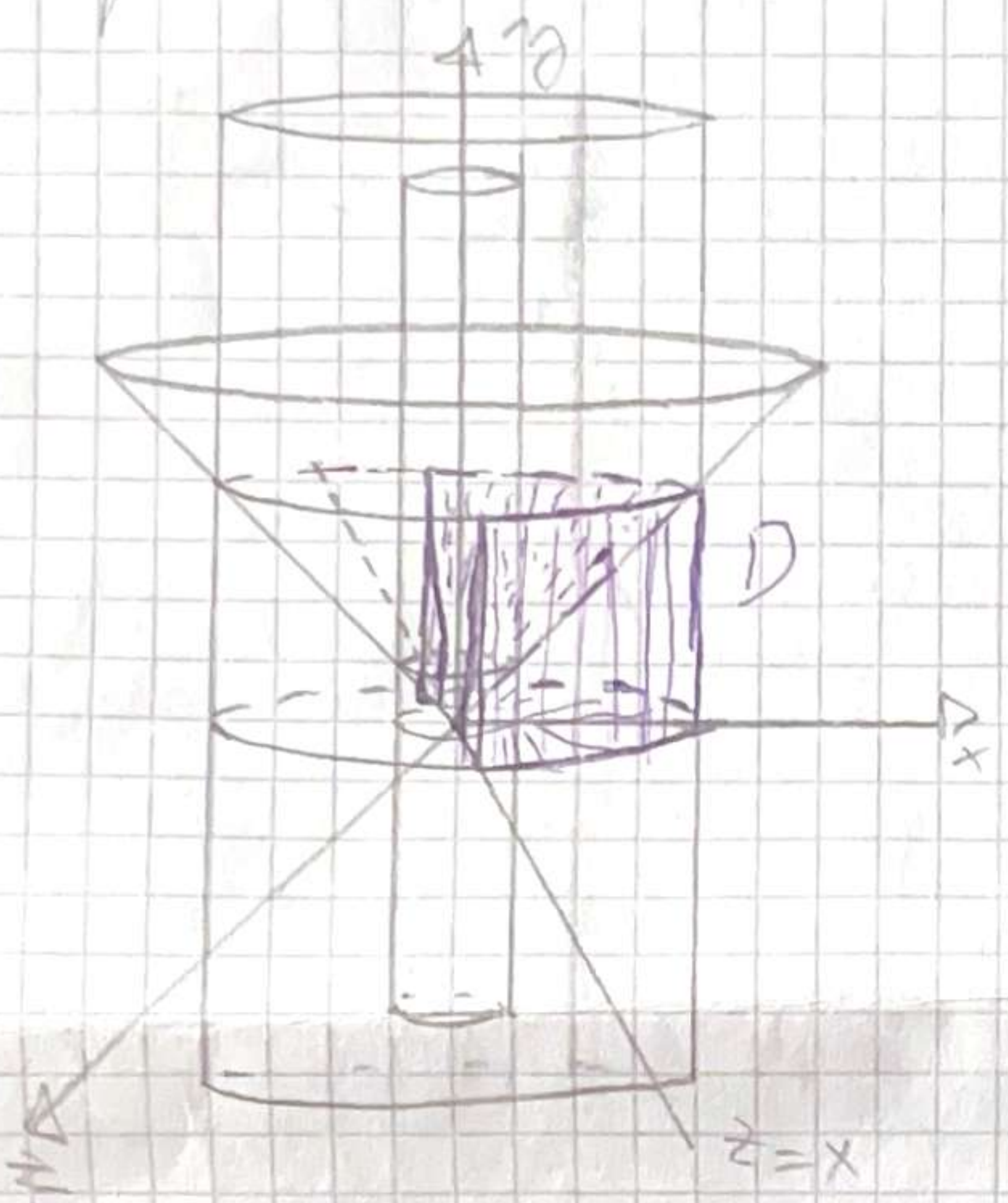
HOJA Nº 5/5

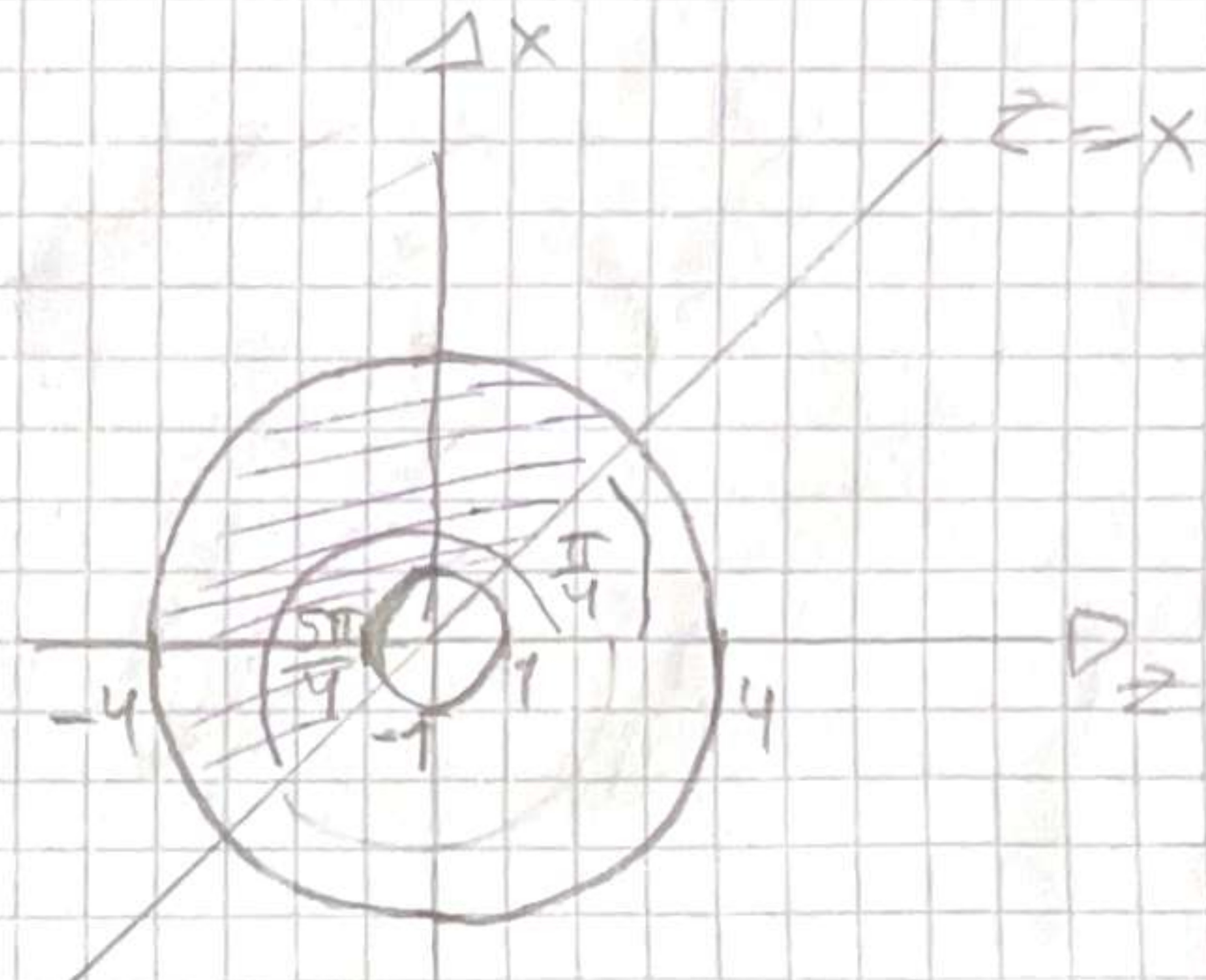
FECHA

4. $\iiint_D \frac{y}{(x^2+z^2)^2+1}\, dV$

$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 1 \leq x^2 + z^2 \leq 16, z \leq x, 0 \leq y \leq \sqrt{x^2+z^2} \}$

Grafico D:





Uso coordenadas cilíndricas con la siguiente Transformación:

$$T(r, \theta, y) = \begin{cases} x = r \operatorname{sen} \theta \\ z = r \cos \theta \\ y = y \end{cases}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ y θ el ángulo en el plano xz

$\Rightarrow J\,T(r, \theta, y) = r$

Para hallar θ uso la recta $z = x$ para encontrar el mínimo y el máximo de θ

$z = x \Leftrightarrow r \cos \theta = r \operatorname{sen} \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \operatorname{sen} \theta$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ ó $\theta = \frac{5}{4}\pi \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5}{4}\pi \right)$

NOTA

Para hallar r uso la desigualdad

$$1 \le x^2 + z^2 \le 16 \Leftrightarrow 1 \le r^2 \le 16 \Leftrightarrow \boxed{1 \le r \le 4}$$

Para hallar y uso la desigualdad:

$$0 \le y \le \sqrt{x^2 + z^2} \Leftrightarrow \boxed{0 \le y \le r}$$

$$\therefore \iiint_D \frac{y}{(x^2+z^2)^2+1}\, dV = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \int_1^4 \int_0^r \frac{y}{r^4+1} \cdot \underbrace{r}_{\text{JT}}\, dy\, dr\, d\theta$$

$$= \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} 1\, d\theta \right) \cdot \int_1^4 \int_0^r \frac{r}{r^4+1} \cdot y\, dy\, dr$$

$$= \pi \cdot \int_1^4 \frac{r}{r^4+1} \cdot \frac{1}{2} (y^2) \Big|_{y=0}^{y=r}\, dr$$

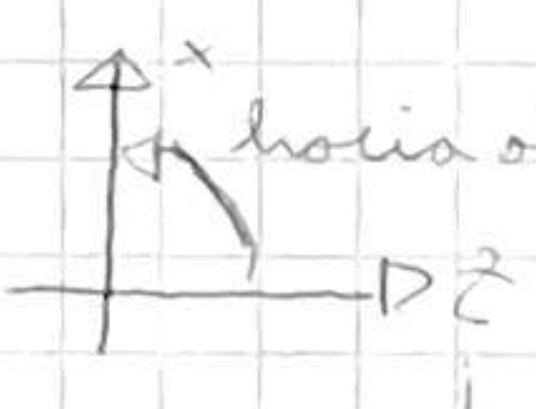
$$= \frac{\pi}{2} \cdot \int_1^4 \frac{r^3}{r^4+1}\, dr = \frac{\pi}{2} \int_2^{257} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t}\, dt$$

$$\boxed{\begin{aligned} t &= r^4 + 1 \\ dt &= 4r^3\, dr \end{aligned}}$$ sustitución

$$= \frac{\pi}{8} \cdot \int_2^{257} \frac{1}{t}\, dt = \frac{\pi}{8} \cdot \left(\ln|t| \right) \Big|_2^{257} = \boxed{\frac{\pi}{8} \cdot (\ln 257 - \ln 2)}$$

RTA

Aclaración: elegí $x = r \operatorname{sen} \theta$ y no $x = r \cos \theta$ para que ángulo en el plano xz se recorra en sentido antihorario (



)

y me facilite pensar θ.