Técnicas de Diseño de Algoritmos
Primer Cuatrimestre 2024
Primer Parcial

Nombre y Apellido	LU
....	....

Duración : 4 horas
Este examen es a ***libro cerrado****.*
Para aprobar el parcial se debe alcanzar una nota de 50 *puntos.*

1. Preguntas opción múltiple (60 ptos.)

Las preguntas con el símbolo ♣ pueden tener cero, una o varias respuestas correctas. Las otras preguntas tienen una única respuesta correcta.
Un ejercicio con todas sus opciones V marcadas, y todas sus F no marcadas suma 6 puntos.

Pregunta 1 ♣ "A guardar, a guardar..." dice la profe de jardín, y Eric sabe que tiene que guardar todos los juguetes que usó en los cajones. Sabe que puede usar hasta c cajones y que usó j juguetes, con $c < j$. El ancho y largo de los juguetes es justo el ancho y el largo de los cajones. Cada cajón tiene la misma altura A, y cada juguete i, con $1 \leq i \leq j$, tiene altura a_i. Sabe que hay alguna forma de poner todos los juguetes en los cajones, pero no se acuerda de qué cajón sacó cada juguete. Va a hacer lo único que sabe: buscar la solución con backtracking. ¿Qué complejidades temporales serían las más ajustadas para los algoritmos de backtracking que podría usar?

- ☐ $O(j!)$
- ☐ $O(j! \cdot j)$
- ☐ $O(c^j)$
- ☐ $O(A \cdot \sum_{i=1}^{j} a_i)$

Pregunta 2 En la programación dinámica siempre se cumple que:

- ☐ Hay más de un posible valor de retorno para cada subproblema.
- ☐ Utilizar memorización garantiza que solo se calculen los subproblemas necesarios, lo que siempre reduce el tiempo de ejecución del algoritmo.
- ☐ Ninguna de estas respuestas es correcta.
- ☐ Utilizar memorización te obliga a utilizar una solución recursiva para cada problema.
- ☐ Cuándo hay múltiples párametros en la función implementada se necesita una matriz (de 2 o más dimensiones) para memoizar los resultados

Pregunta 3 ♣ Se tiene un arreglo A ordenado decrecientemente de n números naturales consecutivos con k huecos, es decir, en el arreglo todos los elementos son consecutivos excepto en k posiciones. Por ejemplo, el arreglo $A = [19, 16, 15, 13, 12, 11]$ tiene 2 huecos en los valores $(19, 16)$ y $(15, 13)$. El tamaño de un hueco (x, y) se define cómo $|x - y|$. Se puede asumir que el arreglo tiene tamaño potencia de 2. Sea t el tamaño del hueco más grande. ¿Cuál sería la cota más ajustada del mejor algoritmo $D\&C$ en base a A, n, k, t que encuentra el valor de t?

- ☐ $O(log(n) * k)$
- ☐ $O(log(n) * k + t)$
- ☐ $O(n * k)$
- ☐ No se puede calcular su complejidad con el teorema maestro pues resolver su caso base no es $O(1)$.
- ☐ No se puede calcular su complejidad con el teorema maestro pues no siempre se subdivide en la misma cantidad de suproblemas.

Pregunta 4 El tiempo de ejecución de un determinado algoritmo responde a la siguente recurrencia, con su caso base para $T(i) \in \Theta(1)$ para todo $i < 10$.

$$T(n) = 3 * T\left(\frac{n}{9}\right) + 5 * n^{1/4}$$

Para determinar la complejidad de este algoritmo, se nos presenta la siguiente demostración utilizando el teorema maestro de que la recurrencia es $\Theta\left(\sqrt{n}\right)$.
Nos encontramos en el primer caso del teorema maestro. Puesto que para $\epsilon = -6$, se cumple que $f(n) = 5 * n^{1/4} \in\ O\left(n^{\log_c a - \epsilon}\right) = O\left(n^{\log_9 3 + 6}\right) = O\left(n^1\right)$, por lo que $T(n) = \Theta\left(n^{\log_c a}\right) = \Theta(\sqrt{n})$.

- ☐ No se puede utilizar teorema maestro para esta función de recurrencia
- ☐ La complejidad no es ajustada, la recurrencia es $O\left(n^{1/4}\right)$
- ☐ La complejidad es ajustada, la demostración es incorrecta.
- ☐ La complejidad no es ajustada, la recurrencia es $O\left(n^{1/3}\right)$
- ☐ La demostración es correcta.

Pregunta 5 ♣ Un grafo *etiquetado* G es un grafo cuyos vértices tienen cada uno una etiqueta distinta en el conjunto $\{1, \ldots, n\}$, donde n es la cantidad de vértices de G. En G, cada arista se etiqueta utilizando las etiquetas de sus vértices incidentes. Dos grafos etiquetados de n vértices son *iguales* cuando tienen el mismo conjunto de aristas etiquetadas. Una *orientacion acíclica* de un grafo (etiquetado o no) G es un grafo orientado H que no tiene ciclos dirigidos y que resulta de asignarle una dirección a cada arista de G. Ciertamente, si G es etiquetado, entonces H mantiene las mismas etiquetas que G. ¿Cuál/es de las siguientes afirmaciones son verdaderas?:

- ☐ Todo grafo etiquetado con al menos una arista tiene una cantidad impar de orientaciones acíclicas distintas.
- ☐ Toda orientación acíclica de un grafo tiene al menos un *sumidero*[*].
- ☐ Todo grafo etiquetado tiene al menos un *sumidero*[*].
- ☐ Todo grafo etiquetado con al menos una arista tiene una cantidad par de orientaciones acíclicas distintas.

[*] Un sumidero es un vértice con grado de salida cero.

Pregunta 6 ♣ Seguimos en el contexto del grafo etiquetado de la pregunta anterior. ¿Cuál/es de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Aclaración: K_n es el grafo completo de n vértices.

- ☐ Si a una orientación acíclica H de un grafo le agregamos un nuevo vértice v junto a una arista $u \to v$ para todo vértice u de H, entonces el grafo resultante es la orientación acíclica de un grafo.
- ☐ Toda orientación acíclica de K_n tiene un único sumidero.
- ☐ Toda orientación acíclica de K_n tiene exactamente dos sumideros (para $n \geq 4$).
- ☐ El grafo K_n etiquetado tiene exactamente n^2 orientaciones acíclicas distintas.

Pregunta 7 ¿Cuál de las siguientes propiedades sobre grafos es falsa?

- ☐ Si G tiene exactamente 2 vértices con grado impar, tiene que haber un camino entre ellos.
- ☐ El digrafo resultado de darle una orientación a un grafo completo tiene un camino de longitud $n - 1$.
- ☐ Si G es un grafo conexo entonces no es un grafo junta. [*]
- ☐ La existencia de un ciclo en un grafo asegura que el grafo es conexo.

[*] Un grafo junta J, $J = G + H$ de G y H es el grafo que se obtiene de $G \cup H$ agregando todas las aristas (v, w) posibles entre un vértice $v \in V(G)$ y otro vértice $w \in V(H)$