1	2	3	4
B	B	B	R

CALIFICACIÓN
8,5

Gabriela

TEMA 3

APELLIDO Y NOMBRE: S German

LIBRETA:

CARRERA: Lic. Ciencias de la Computacion

COMISIÓN: 4

Álgebra I - Segundo cuatrimestre de 2024
Segundo Parcial - 29/11/2024

---

1. Hallar todas las soluciones $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ de la ecuación

$$12x + 19y = 4$$

que satisfacen simultáneamente que $x^2 \equiv y^2 \pmod{31}$.

2. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que el resto de la división de $15a^{831}$ por 77 es 6.

3. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$(1 + i)^n (1 - \sqrt{3}i)^{4-n}$$

es un número real negativo.

4. Hallar todos los $k \in \mathbb{Q}$ para los cuales el polinomio $f = X^6 + kX^3 + 25 \in \mathbb{Q}[X]$ tiene al menos una raíz compleja múltiple. Para cada uno de los valores de k hallados, factorizar f en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

2)

Por enunciado sabemos que:

$$r_{77}(15 \cdot a^{831}) = 6 \implies 15 \cdot a^{831} \equiv 6 \ (77) \underset{7 \perp 11}{\iff} \begin{cases} 15 \cdot a^{831} \equiv 6 \ (7) \\ 15 \cdot a^{831} \equiv 6 \ (11) \end{cases}$$

Abordamos cada una de las dos expresiones para encontrar información del a.

- Empezamos con $15 a^{831} \equiv 6 \ (7)$:

  - Si $7 \mid a$:

    $$15 \cdot a^{831} \underset{a \equiv 0 (7)}{\equiv} 15 \cdot 0^{831} \equiv 0 \to \text{ABS. pues } 0 \not\equiv 6 \ (7)$$

  - Si $7 \nmid a$:

    Como $7 \nmid a$ y 7 es primo, por PTF tengo que $a^6 \equiv 1 \ (7)$.

    Luego:

    $$15 \cdot a^{831} \equiv 15 \cdot (a^6)^{138} \cdot a^3 \underset{PTF}{\equiv} 15 \cdot 1^{138} \cdot a^3 \equiv 15 \cdot a^3 \equiv 6 \ (7)$$

    Luego, $15 \equiv 1 \ (7)$:

    $$15 \cdot a^3 \equiv a^3 \equiv 6 \ (7)$$

    Por tabla de restos, veo qué a cumple:

a	0	1	2	3	4	5	6
a^2	0	1	4	2	2	4	1
a^3	0	1	1	6	1	6	6

(mod 7)

Entonces para que se cumpla $15 a^{831} \equiv 6 \ (7)$:

$$\underline{a \equiv 3 \ (7)} \text{ ó } \underline{a \equiv 5 \ (7)} \text{ ó } \underline{a \equiv 6 \ (7)}$$

- Sigamos con $15 a^{831} \equiv 6 \ (11)$:

  - Si $11 \mid a$:

    $$15 \cdot a^{831} \underset{a \equiv 0 (11)}{\equiv} 15 \cdot 0^{831} \equiv 0 \to \text{ABS pues } 0 \not\equiv 6 \ (11)$$

S [redacted] German

- Si $11 \nmid a$:

Como $11 \nmid a$ y 11 es primo, por PTF tenemos que $a^{10} \equiv 1 \ (11)$.

Luego:

$$15.a^{831} \equiv 15.(a^{10})^{83}.a \underset{PTF}{\equiv} 15.1^{83}.a \equiv 15.a \equiv 6 \ (11)$$

Luego, observo que $3 \perp 11$, entonces puedo multiplicar por 3 en ambos lados:

$$3.15.a \equiv 3.6 \ (11)$$
$$45.a \equiv 18 \ (11)$$
$$1.a \equiv 7 \ (11)$$

Entonces para que se cumpla $15.a^{831} \equiv 6 \ (11)$:

$$\underline{a \equiv 7 \ (11)}$$

- Juntando los requerimientos de ambas ecuaciones, nos quedan 3 sistemas de 2 ecuaciones cada uno.

Como $7 \perp 11$, por el Teorema Chino del Resto existe una solucion única para cada uno de los 3 sistemas modulo $7.11 = 77$.

$$S1 \begin{cases} a \equiv 3 \ (7) \\ a \equiv 7 \ (11) \end{cases} \iff \underline{a_1 \equiv 73 \ (77)}$$

$$S2 \begin{cases} a \equiv 5 \ (7) \\ a \equiv 7 \ (11) \end{cases} \iff \underline{a_2 \equiv 40 \ (77)}$$

$$S3 \begin{cases} a \equiv 6 \ (7) \\ a \equiv 7 \ (11) \end{cases} \iff \underline{a_3 \equiv 62 \ (77)}$$

Observacion:

El metodo utilizado para resolver los sistemas fue por tanteo.

S1:

$7 \not\equiv 3 \ (7)$

$7+11 = 18 \not\equiv 3 \ (7)$

$18+11 = 29 \not\equiv 3 \ (7)$

$\vdots$

$40+11 = 51 \not\equiv 3 \ (7)$

$\vdots$

$62+11 = 73 \equiv 3 \ (7)$ ✓

Idem razonamiento para S2 y S3.

Conclusion

Los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $r_{77}(15.a^{831}) = 6$ son:

$$\boxed{a \equiv 62 \ (77) \text{ o } a \equiv 40 \ (77) \text{ o } a \equiv 73 \ (77).}$$

3)

Interpretando el enunciado, nos están pidiendo hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $z = (1+i)^n \cdot (1-\sqrt{3}i)^{4-n}$ tenga su argumento como $\pi + 2K\pi$ con $K \in \mathbb{Z}$ (ese argumento hace que z sea un número real negativo). (el argumento es π)

Pasamos de forma binomial a polar:

$$1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \; ; \; 1-\sqrt{3}i = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{5}{3}\pi}$$

Luego:

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \sqrt{2}^n \cdot e^{i\frac{\pi}{4} \cdot n}$$

$$(1-\sqrt{3}i)^{4-n} = \left(2 \cdot e^{i \cdot \frac{5}{3}\pi}\right)^{4-n} = 2^{4-n} \cdot e^{i \cdot \frac{5}{3}\pi \cdot (4-n)}$$

Luego:

$$z = \sqrt{2}^n \cdot 2^{4-n} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{4} \cdot n + \frac{5}{3} \cdot \pi \cdot (4-n)\right)}$$

Quiero lograr que $\arg(z) = \pi + 2K\pi$ con $K \in \mathbb{Z}$:

$$\arg(z) = \frac{\pi}{4} \cdot n + \frac{5}{3} \cdot \pi \cdot (4-n) + 2K\pi = \pi \quad \text{con } K \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{n}{4} + \frac{5}{3} \cdot (4-n) + 2K = 1 \rightarrow \text{divido todo por } \pi$$

$$\frac{n}{4} + \frac{20}{3} - \frac{5}{3} \cdot n + 2K = 1 \rightarrow \text{distribuyo paréntesis}$$

$$-\frac{17}{12} n + 2K = -\frac{17}{3}$$

$$12 \cdot \left(-\frac{17}{12} \cdot n + 2K\right) = 12 \cdot \left(-\frac{17}{3}\right) \rightarrow \text{"lo convierto" a números enteros}$$

$$n \cdot (-17) + 24K = -68$$

Ahora es un problema de enteros y puedo verlo como:

$$-17 \cdot n \equiv -68 \ (24) \rightarrow \text{observar que } (-17:24) = 1 \mid -68, \text{ entonces hay solución}$$

$$7 \cdot n \equiv 4 \ (24)$$

$$7 \cdot 7 \cdot n \equiv 7 \cdot 4 \ (24) \rightarrow \text{observar que } 24 \perp 7$$

$$1 \cdot n \equiv 28 \equiv 4 \ (24)$$

Conclusión: Como $|z| \neq 0$ pues $\sqrt{2}^n \cdot 2^{4-n} \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ los $n \in \mathbb{N}$ tq z es un nº real negativo son $\rightarrow \boxed{n \equiv 4 \ (24)}$

 German

4)

Para que una raíz sea múltiple, su multiplicidad tiene que ser como mínimo 2.
Esto quiere decir que tiene que ser, al menos, raíz de f y f'.

Analicemos los candidatos de f':

$$f' = 6x^5 + 3K.x^2$$

Quiero ver cuando f' da 0:

$$f' = x^2.(6x^3+3K) = 0 \iff x^2 = 0 \text{ o } 6x^3+3K=0$$

$\hookrightarrow x=0$ no sirve pues $f(0)\neq 0$

$\hookrightarrow$ entonces tiene que ser alguna de las raíces de la cúbica. Tendría que encontrar los $K \in \mathbb{Q}$ que hagan que de 0...

Observo que si f tiene una raíz compleja $\alpha = a+bi$ con $a,b \in \mathbb{R}$ de multiplicidad al menos dos. ~~Esto~~ También tiene que estar su conjugado con la misma multiplicidad.

Observo que con $w = x^3$ se puede pensar a f como:

$$f = w^2 + K.w + 25 \overset{\text{no quiero}}{=} 0$$

$$f' = 2.w + K \overset{\text{no quiero}}{=} 0$$

Entonces K sería de la forma $K = -2w$ y tendría que ver cuando $K \in \mathbb{Q}$ que sería cuando $w \in \mathbb{Q}$.

Luego tengo que ver cuando $f = 0$ con $K = -2w$ con $w \in \mathbb{Q}$

$$f = w^2 + (-2w).w + 25 = w^2 - 2.w^2 + 25 = -w^2 + 25 = 25 - w^2 = (5-w).(5+w)$$

Entonces solo servirían $w=5$ o $w=-5$

Quedando 2 posibles K: $K = 10$ o $K = -10$
$= -2.(-5)$ $\quad = -2.(5)$

¿Por qué para estos valores de k hay raíces múltiples? ¿Cuáles son estas raíces?

Luego me quedan dos posibles polinomios xq tengo $K=10$ o $K=-10$. Como ya conozco algunas raíces ¿cuáles? puedo usar Ruffini para bajar de grado. Luego con Gauss evaluar las raíces $\in \mathbb{Q}$ y, conociéndolas, bajar otra vez el grado hasta que probablemente quede una cuadrática y usaría la resolvente... PERO NO LLEGO :(
Conociendo las raíces se puede factorizar...

1)

Resolvemos la ecuación:

$$12x + 19 \cdot y = 4$$

Como $(12:19) = 1 \mid 4$, ent hay solución.

Buscamos solución particular:

Como $(12:19) = 1$; ent existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tq:

$$a \cdot 12 + b \cdot 19 = 1$$

Por tanto, encuentro que con $a = -8$, $b = 5$:

$$-8 \cdot 12 + 5 \cdot 19 = -1$$

Luego, multiplicamos por -4:

$$-4(-8 \cdot 12 + 5 \cdot 19) = -1 \cdot -4$$

$$32 \cdot 12 + (-20) \cdot 19 = 4$$

Luego, las soluciones de la ecuación son el resultado de juntar las soluciones del sistema homogéneo con la solución particular.

$$S = \{(-19 \cdot k + (32), 12 \cdot k + (-20)) \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{(-b \cdot k + a_0, a \cdot k + b_0) \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$$

→ notar cambio de notación $x = a$, $y = b$

Ahora solo nos queda hallar los $k \in \mathbb{Z}$ tq $x^2 \equiv y^2$:

$$x^2 \equiv y^2 \quad (31)$$

$$(-19k + 32)^2 \equiv (12k - 20)^2 \quad (31)$$

$$19^2 \cdot k^2 - 2 \cdot 19 \cdot 32 \cdot k + 32^2 \equiv 12^2 \cdot k^2 - 2 \cdot 12 \cdot 20k + 20^2 \quad (31)$$

$$217 \cdot k^2 - 736 \cdot k + 624 \equiv 0 \quad (31)$$

$$0 \cdot k^2 + 8 \cdot k + 4 \equiv 0 \quad (31)$$

$$8k \equiv 27 \quad (31)$$

$$4 \cdot 8 \cdot k \equiv 4 \cdot 27 \rightarrow 4 \perp 31 \quad (31)$$

$$\underline{k \equiv 15 \quad (31)}$$

S German

Luego

$k = 31 \cdot q + 15 \quad$ con $q \in \mathbb{Z}$

Entonces las soluciones quedan

$$\boxed{\begin{array}{l} x = -19 \cdot k + 32 = -19 \cdot (31 \cdot q + 15) + 32 = -589 \cdot q - 253 \\ y = 12 \cdot k - 20 = 12 \cdot (31 \cdot q + 15) - 20 = 372 \cdot q + 160 \end{array} \quad \text{con } q \in \mathbb{Z}}$$