Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Primer Recuperatorio del Segundo Parcial (09/12/2024) - 2do. Cuatrimestre 2024

TEMA 2

1	2	3	4	Nota
B	B⁻	B	B⁻	9 nueve

Apellido: SOSA Nro. de libreta: 916/24 Nro de práctica: 2

Nombre: EZEQUIEL Carrera: Cs. de Datos

1. Sea f una función de clase C^2 tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(0,1)$ es

$$P(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - xy + y^2 + x + 7,$$

y sea

$$g(x,y) = 3x^2y + x^2 + e^{f(x,y)-8} - 2y.$$

Analizar si $g(x,y)$ posee un extremo local en $(0,1)$.

2. Encontrar, si existen, los extremos absolutos de $f(x,y) = x^3 - y^2$ restringida a la región

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1,\ y \geq \sqrt{2}x\}.$$

3. Analizar la convergencia de las integrales:

a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{e^{3x-3}-1}{\sqrt{x-1}}\,dx.$ b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(e^{x^2})+1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}\,dx.$

4. Calcular

$$\iiint_D \frac{y}{(x^2+z^2)^2+1}\,dV,$$

siendo

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 1 \leq x^2+z^2 \leq 16,\ z \leq x\ ,\ 0 \leq y \leq \sqrt{x^2+z^2}\}.$$

Escribir todos los razonamientos que justifican las respuestas.

⊛ O si no existe alguna de esas derivadas en (a,b), que no es el caso ya que g es C^1, por ser suma polinomio con ~~[illegible]~~ una composición C^1

1) ¿$g(0,1)$ es un extremo local? si es

Para esto busco puntos críticos de $g(x,y)$

(a,b) es punto crítico de $g \iff \nabla g(a,b)=(0,0)$

$\nabla g(a,b)=(0,0) \iff g_x(a,b)=0 \wedge g_y(a,b)=0$ ⊛

Calculo g_x y g_y:

$$g_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left[3x^2y+x^2+e^{f(x,y)-8}-2y\right]$$
$$=6xy+2x+e^{f(x,y)-8}f_x(x,y)$$

$$g_x(x,y)=6xy+2x+e^{f(x,y)-8}f_x(x,y)$$

$$g_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left[3x^2y+x^2+e^{f(x,y)-8}-2y\right]$$
$$=3x^2+e^{f(x,y)-8}f_y(x,y)-2$$

$$g_y(x,y)=3x^2+e^{f(x,y)-8}f_y(x,y)-2$$

$$g_x(0,1)=e^{f(0,1)-8}f_x(0,1)$$
$$g_y(0,1)=e^{f(0,1)-8}f_y(0,1)-2$$

No tengo a f pero sí a su Taylor de orden 2 en el punto $(0,1)$, y sé que cumple:

$$P(0,1)=\cancel{P}f(0,1) \wedge P_x(0,1)=f_x(0,1) \wedge P_y(0,1)=f_y(0,1)$$

Sigue al dorso.

En efecto:

i) Calculo $P(0,1)$

$$P(0,1) = \frac{1}{2}\cdot 0^2 - 0\cdot 1 + 1^2 + 0 + 7$$

$$\underline{P(0,1) = 8} = F(0,1)$$

ii) Calculo $P_x(0,1)$:

$$P_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}x^2 - xy + y^2 + x + 7\right]$$

$$P_x(x,y) = x - y + 1$$

$$\underline{P_x(0,1) = 0} = F_x(0,1)$$

iii) Calculo $P_y(0,1)$:

$$P_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x^2 - xy + y^2 + x + 7\right)$$

$$P_y(x,y) = -x + 2y$$

$$\underline{P_y(0,1) = 2} = F_y(0,1)$$

Retomando:

$$g_x(0,1) = e^{F(0,1)-8}\,F_x(0,1)$$

$$= e^{8-8}\cdot 0 = e^0\cdot 0 = 0$$

$$\underline{g_x(0,1) = 0}$$

$$g_y(0,7) = e^{f(0,7)-8}\, f_y(0,7) - 2$$
$$= e^{8-8} \cdot 2 - 2$$
$$= e^{0} \cdot 2 - 2 = 2 - 2 = 0$$
$$\underline{g_y(0,7) = 0}$$

Como $g_x(0,7) = g_y(0,7) = 0$, efectivamente $(0,7)$ es un punto crítico, queda descartar que sea un punto silla !. Para esto utilizo el criterio del Hessiano.

ya que es $C^2 \Rightarrow g_{xy} = g_{yx}$

$$D(0,7) = g_{xx}(0,7)\, g_{yy}(0,7) - g_{xy}^2(0,7)$$

i) Calculo $g_{xx}(0,7)$

$$g_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[6xy + 2x + e^{f(x,y)-8} f_x(x,y) \right]$$
$$= 6y + 2 + e^{f(x,y)-8} f_x(x,y) f_x(x,y) + e^{f(x,y)-8} f_{xx}(x,y)$$

$$g_{xx}(x,y) = 6y + e^{f(x,y)-8}\left(f_x^2(x,y) + f_{xx}(x,y)\right) + 2$$

$$g_{xx}(0,7) = 6 + e^{f(0,7)-8}\left(f_x^2(0,7) + f_{xx}(0,7)\right) + 2$$
$$= 6 + e^{8-8}\left(0^2 + f_{xx}(0,7)\right) + 2$$
$$= 6 + 1\, 0^2 + f_{xx}(0,7) + 2$$
$$= f_{xx}(0,7) + 8$$

sigue dorso !

Como P es el taylor de orden, también cumple:

$$P_{xx}(0,1) = F_{xx}(0,1) \wedge P_{yy}(0,1) = F_{yy}(0,1)$$

$$P_{xy}(0,1) = F_{xy}(0,1) \underset{\uparrow}{=} F_{yx}(0,1)$$

F es C^2

Calculo $P_{xx}(x,y)$

$$P_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[x - y + 1\right]$$

$$P_{xx}(x,y) = 1 \qquad P_{xx}(0,1) = 1 = F_{xx}(0,1)$$

Por tanto $g_{xx}(0,1) = 9$

ii) Calculo $g_{yy}(0,1)$:

$$g_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[3x^2 + e^{F(x,y)-8} F_y(x,y) - 2\right]$$

$$= e^{F(x,y)-8} F_y^2(x,y) + e^{F(x,y)-8} F_{yy}(x,y)$$

$$g_{yy}(x,y) = e^{F(x,y)-8}\left(F_y^2(x,y) + F_{yy}(x,y)\right)$$

$$g_{yy}(0,1) = e^{F(0,1)-8}\left(F_y^2(0,1) + F_{yy}(0,1)\right)$$

$$= e^{8-8}\left(2^2 + F_{yy}(0,1)\right)$$

$$= 2^2 + F_{yy}(0,1)$$

sigue otra hoja.

Calculo $P_{yy}(x,y)$

$$P_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[-x + 2y\right]$$

$$P_{yy}(x,y) = 2 \Rightarrow P_{yy}(0,1) = 2$$

Entonces $g_{yy}(0,1) = 6$

iii) CALCULO $g_{xy}(0,1)$

$$g_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[6xy + 2x + e^{F(x,y)-8} F_x(x,y)\right]$$

$$= 6x + e^{F(x,y)-8} F_y(x,y) F_x(x,y) + e^{F(x,y)} F_{xy}(x,y)$$

$$g_{xy}(x,y) = 6x + e^{F(x,y)-8}\left(F_x(x,y) F_y(x,y) + F_{xy}(x,y)\right)$$

$$g_{xy}(0,1) = 0 + e^{F(0,1)-8}\left(F_x(0,1) F_y(0,1) + F_{xy}(0,1)\right)$$

$$= e^{8-8}\left(0 \cdot 2 + F_{xy}(0,1)\right)$$

$$g_{xy}(0,1) = F_{xy}(0,1)$$

CALCULO $P_{xy}(0,1)$

$$P_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[x - y + 1\right]$$

$$P_{xy}(x,y) = -1 \Rightarrow P_{xy}(0,1) = -1$$

Por tanto $g_{xy}(0,1) = -1$

Retomando; tengo que:

$g_{xx}(0,1) = 9 \wedge g_{yy}(0,1) = 6 \wedge g_{xy}(0,1) = -1$

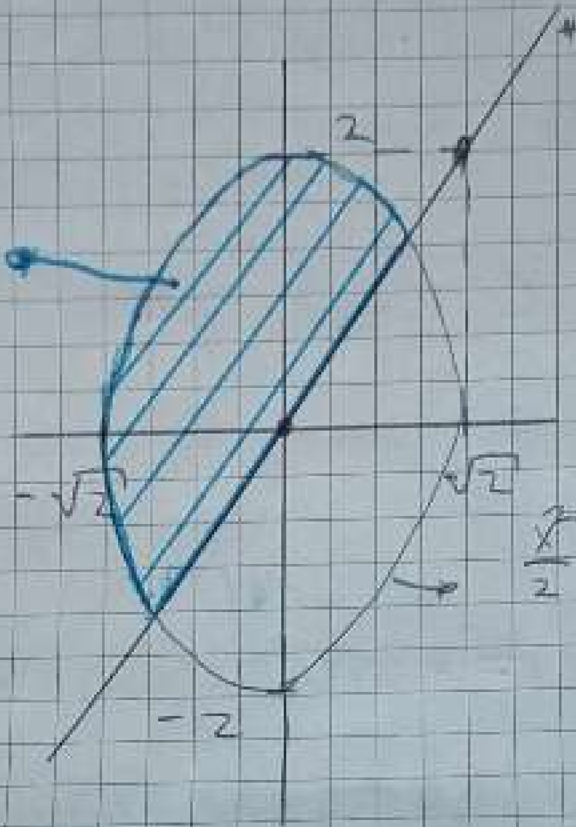
Ahora si calculo:

$$D(0,1) = g_{xx}(0,1)\, g_{y}(0,1) - g_{xy}^{2}(0,1)$$
$$= 9 \cdot 6 - (-1)^2$$
$$D(0,1) = 53$$

Y como $D(0,1) > 0$ y $g_{xx}(0,1) > 0$ entonces $(0,1)$ es minimo local, por criterio del hessiano

RTA: Efectivamente, $g(x,y)$ posee un extremo local en $(0,1)$, en particular es un minimo local.

2) 1ra) Gráfico $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \leq 1,\ y \geq \sqrt{2}x\}$



Como se ve en el dibujo, la región A es cerrada y acotada, por teorema de weirstrass, sé que $F|_A$ alcanza máximo y mínimo absoluto en A.

Obs: . A es una región ya que contiene a su borde

. A es una región acotada ya que puede estar contenida, por ejemplo, en el disco de radio 2.

P. C = Puntos críticos

Como sé que $f|_A$ efectivamente tiene extremos absoluto, busco todos los P.C en A y luego veo sus valores.

2do) ~~Ahi~~ P.C en A:

i) P.C dentro de A: Calculo P.C en general y luego veo si estan en A.

(a,b) es P.C $\Leftrightarrow \nabla f(a,b) = (0,0) \ \underline{\vee} \ (\nexists f_x(a,b) \vee \nexists f_y(a,b))$

Como f es C^1, solo habla del primer caso, si los hay.

$$\nabla f(a,b) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} f_x(a,b) = 0 \\ f_y(a,b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 = 0 \\ -2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

$f_x(x,y) = 3x^2$

$f_y(x,y) = -2y$

Por tanto $(0,0)$ único P.C de f que está dentro de A, ya que

$\frac{1}{2} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot 0^2 \leq 1 \wedge 0 \geq \sqrt{2} \cdot 0$ ⊗

⊗ $\Leftrightarrow (0 \leq 1 \wedge 0 \geq 0)$ ✓ cumple !

ERROR, $(0,0)$ está en el borde de A!

.UBA EXACTAS

ii) P.C ~~dentro~~ en el borde de A:
Utilizando teorema de multiplicadores de Lagrange, hallo P.C de f con la restricción $1/2\, x^2 + 1/4\, y^2 = 1$ y luego evaluo si cumplen $y \geq \sqrt{2}\, x$.

Teorema multiplicadores de Lagrange:
Si (a,b) es un extremo de f con la restricción $g(x,y) = k \Rightarrow$ existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(a,b) = \lambda \nabla g(a,b)$ si $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$

$$f(x,y) = x^3 - y^2 \quad \wedge \quad g(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (3x^2, -2y)$$
$$\nabla g(x,y) = (x, 1/2\, y) = (g_x(x,y), g_y(x,y))$$

PLANTEO sistema:

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \iff (3x^2, -2y) = \lambda (x, 1/2\, y) \quad ①$$

$$① \iff (3x^2, -2y) = (\lambda x, \lambda\, 1/2\, y) \quad ②$$

$$② \iff \begin{cases} 3x^2 = \lambda x \\ -2y = \lambda\, 1/2\, y \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = \lambda \\ -2 = \lambda\, 1/2 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = \lambda \\ \lambda = -4 \end{cases} ③$$

asumo $x \neq 0 \wedge y \neq 0$
~~$x \neq 0$~~ $\vee$
luego pruebo caso particular

sigue dorso

$$\begin{cases} 3x = \lambda \\ \lambda = -4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x = -4 \\ \lambda = -4 \end{cases} \Longleftrightarrow x = -\frac{4}{3} \quad (*)$$

(*) Para determinar valor de y utilizo

$$x^2/2 + y^2/4 = 1$$

$$\frac{(-4/3)^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{sii} \quad \frac{8}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{sii} \quad (A)$$

$$(A) \quad \text{sii} \quad \frac{y^2}{4} = \frac{1}{9} \quad \text{sii} \quad y^2 = \frac{4}{9} \quad \text{sii} \quad |y| = \frac{2}{3}$$

$(-4/3, 2/3)$, $(-4/3, -2/3)$ son P.C de $F|_{g(x,y)=k}$

Como asumí $x \neq 0 \wedge y \neq 0$ no pruebo $(x,y)=(0,0)$

$$\begin{cases} 3x^2 = \lambda x \\ -2y = \lambda \, 1/2 \, y \end{cases}$$ con $(x,y)=(0,0)$ queda $$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \checkmark$$

$(0,0)$ es un P.C de $F|_{g(x,y)=k}$

Luego pruebo $x = 0$; $y \neq 0$ me queda:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -2y = \lambda \, 1/2 \, y \end{cases} \Longleftrightarrow -2 = \lambda \, 1/2 \quad \text{sii} \quad \lambda = -4 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

no aporta pues $-2y = -2y$

no aporta nada, pruebo en $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} = 1$ (B)

$$(B) \Longleftrightarrow y^2 = 4 \Longleftrightarrow |y| = 2$$

$(0,-2)$ y $(0,2)$ P.C de $F|_{g(x,y)=k}$

también pruebo $y=0 \wedge x\neq 0$, me queda

$$\begin{cases} 3x^2 = \lambda x \\ 0=0 \end{cases} \iff 3x = \lambda \iff x = \frac{\lambda}{3}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$

No aporta, pruebo en $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$

$\frac{x^2}{2}=1$ sii $x^2=2$ sii $|x|=\sqrt{2}$

$(\sqrt{2},0)$ y $(-\sqrt{2},0)$ P.C de $f|_{g(x,y)=k}$

~~Retomando.~~

~~P.C dentro de A (0,0)~~

~~P.C en borde de A (-4/3, 2/3); (-4/3, -2/3)~~

~~"se tenía" + (0,0); (0,-2); (0,2)~~

~~$(\sqrt{2},0)$ y $(-\sqrt{2},0)$~~

P	f(P)
(0,0)	0
(-4/3, 2/3)	≃ -2,87
(-4/3, -2/3)	≃ -2,87
(0, -2)	-4
(0, 2)	
$(-\sqrt{2}, 0)$	
$(-\sqrt{2}, 0)$	

ERROR de nervios :(

Retomo en siguiente hoja.

P.C de $f|_{g(x,y)=k}$ son: $(-4/3, 2/3)$ $(-4/3, -2/3)$

$(0, 2)$ $(0, -2)$

$(\sqrt{2}, 0)$ $(-\sqrt{2}, 0)$

Veo cuales pertenecen a A, todos cumplen $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$, falta ver cuales $y \geq \sqrt{2}\, x$

✓ $(-4/3, 2/3) \in A \iff 2/3 \geq \sqrt{2}\left(-\frac{4}{3}\right)$ sii $2/3 \geq -\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ✓

✓ $(-4/3, -2/3) \in A \iff -2/3 \geq \sqrt{2}\left(-\frac{4}{3}\right)$ sii $\underbrace{-2/3}_{-0,6} \geq \underbrace{-\frac{4\sqrt{2}}{3}}_{\simeq -1,89}$ ✓

✓ $(0,2) \in A \iff 2 \geq \sqrt{2} \cdot 0$ sii $2 \geq 0$ ✓

X $(0,-2) \in A \iff -2 \geq \sqrt{2} \cdot 0$ sii $-2 \geq 0$ X

X $(\sqrt{2}, 0) \in A \iff 0 \geq \sqrt{2}\,\sqrt{2}$ sii $0 \geq 2$ X

✓ $(-\sqrt{2}, 0) \in A \iff 0 \geq \sqrt{2}(-\sqrt{2})$ sii $0 \geq -2$ ✓

Obs: el "si y sólo si" es considerando que el punto ya cumple la condición $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \leq 1$.

Por tanto:

P.C en el arco de A son:

$(-4/3, 2/3)$; $(-4/3, -2/3)$; $(0, 2)$; $(-\sqrt{2}, 0)$

Queda ver en la recta !

) Parametrizo la recta $\sigma_1(t) = (t, \sqrt{2}\,t)$

con $t \in [-1, 1]$

$x^2/2 + y^2/4 = 1$ sii $y^2/4 = 1 - x^2/2$ ⊛

⊛ sii $y^2 = 4 - 2x^2$ sii $|y| = \sqrt{4 - 2x^2}$

$\underbrace{y}_{\text{cons ii}}$

$\sqrt{2}\,x = \sqrt{4 - 2x^2}$ sii $2x^2 = 4 - 2x^2$ ⊛

⊛ $\Leftrightarrow$ $4x^2 = 4$ sii $x^2 = 1$ sii $|x| = 1$

$\sqrt{2}\,x = -\sqrt{4 - 2x^2}$ sii $2x^2 = 4 - 2x^2$ ⊛

⊛ sii $4x^2 = 4$ sii $|x| = 1$

la parte positiva y negativa

IGUALE $\sqrt{2}\,t$ y la función partida de la elipse para hallar la intersección entre estas y saber entre que valores se mueve t !

) Compongo $f(\sigma_1(t)$

$h(t) = f(\sigma_1(t)) = f(t, \sqrt{2}\,t) = t^3 - (\sqrt{2}\,t)^2$

$h(t) = t^3 - 2t^2$

$h'(t) = 3t^2 - 4t$

$3t^2 - 4t = 0$ sii $t(3t - 4) = 0$ ⊛

⊛ $\Leftrightarrow$ $t = 0$ $\vee$ $3t - 4 = 0$ sii $t = 0$ $\vee$ $t = \frac{4}{3}$

sigue en otra hoja !

P.C $\qquad\qquad\qquad\qquad$ borde

Por tanto $\overbrace{(0,0) \, ; \, (4/3, 4\sqrt{2}/3)}^{\text{P.C}} \, ; \, \overbrace{(-1, -\sqrt{2})(1, \sqrt{2})}^{\text{borde}}$

son los P.C de la recta.

Retomando

P.C dentro de A: $(0,0)$ En realidad $(0,0)$ esta en el borde de A

P.C en el borde de A:

$(-4/3, 2/3)$; $(-4/3 ; -2/3)$; $(0,2)$; $(-\sqrt{2}, 0)$
$(4/3, 4\sqrt{2}/3)$; $(-1, -\sqrt{2})$; $(1, \sqrt{2})$

Ya con todos evaluo:

P	F (P)
$(0,0)$	0] máx absoluto.
$(-4/3, 2/3)$	$\simeq -2,81$
$(-4/3, -2/3)$	$\simeq -2,81$
$(0, 2)$	-4] min. absoluto
$(-\sqrt{2}, 0)$	$-2\sqrt{2} \simeq -2,83$
$(4/3, 4\sqrt{2}/3) \notin A$	$\simeq -1,19$
$(-1, -\sqrt{2})$	-3
$(1, \sqrt{2})$	-1

RTA: $(0,0)$ es maximo absoluto de $F|_A$
$(0,2)$ es minimo absoluto $F|_A$

3) a) $\int_1^3 \frac{e^{3x-3}-1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

ya que $e^{3x-3} \geq e^{3x-3}-1$

y $e^{3x-3}-1 \geq \frac{e^{3x-3}-1}{\sqrt{x-1}}$

$$e^{3x-3} \underset{\circledast}{\geq} \frac{e^{3x-3}-1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\int_a^b e^{3x-3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^t\,dt = \frac{1}{3}e^t = \frac{1}{3}e^{3x-3}$$

$t = 3x-3$

$dt = 3\,dx$

Entonces $\int_1^3 e^{3x-3}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x-3}\Big|_1^3 = \frac{1}{3}\left[e^6-1\right]$

$\int_1^3 e^{3x-3}\,dx$ converge y como

$e^{3x-3} \geq \frac{e^{3x-3}-1}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow \int_1^3 \frac{e^{3x-3}-1}{\sqrt{x-1}}$ converge !

~~[illegible]~~ Punto b) al dorso !

.UBA EXACTAS

$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$x^3 - 2x^2 + x$

b) $$\int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(e^{x^2}) + 1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}\, dx$$

$$\cancel{\frac{\operatorname{sen}^2(e^{x^2}) + 1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}} \leq \frac{\operatorname{sen}^2(e^{x^2}) + 1}{\sqrt[3]{x}}}$$

~~ya que $x(x-1)^2 \geq x$ si $x \geq 1$~~

~~limites de integración en $[2;+\infty)$ no hay problema~~

$$\cancel{\frac{\operatorname{sen}^2(e^{x^2}) + 1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}} > \frac{-1+1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2(e^{x^2}) + 1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}} = \frac{\operatorname{sen}^2(e^{x^2}) + 1}{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1}} \quad \otimes$$

$$\otimes \geq \frac{\operatorname{sen}^2(e^{x^2}) + 1}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\operatorname{sen}^2(e^{x^2}) + 1}{x}$$

$x^3 - 2x^2 + 1 < x^3$

y $f(x) = \sqrt[3]{x}$

es una función

estrictamente creciente

$$\int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(e^{x^2}) + 1}{x}\, dx = \int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(e^{x^2})}{x} + \frac{1}{x}\, dx = \otimes$$

$$\otimes = \int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(e^{x^2})}{x}\, dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

concluyo ~~[illegible]~~

siguiente hoja 8

.UBA EXACTAS

Como $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ sé que diverge por criterio de comparación, entonces sé que ~~más~~ independientemente de la divergencia o no, de la otra integral, la suma diverge.

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(e^{x^2})+1}{x}\,dx \text{ diverge}$$

$$\text{Si } \frac{\operatorname{sen}^2(e^{x^2})+1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}} \geq \cancel{\frac{\operatorname{sen}^2(e^{x^2})}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}} \; \frac{\operatorname{sen}^2(e^{x^2})+1}{x}$$

$$\Longrightarrow \int_{2}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(e^{x^2})+1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}\,dx \text{ diverge}$$

3) ~~[illegible]~~

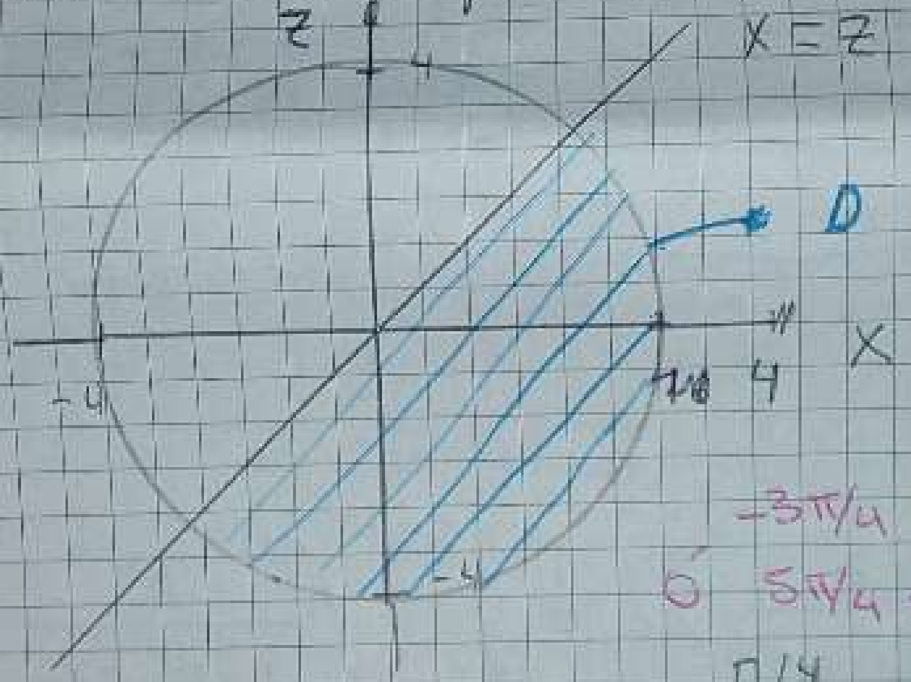
D es una región de tipo III

por tanto:

$$\iiint_D \frac{5}{(x^2+z^2)^2+1}\,dV = \iint_E \left[\int_0^{\sqrt{x^2+z^2}} \frac{5}{(x^2+z^2)^2+1}\,dy \right] dA$$

Con E la proyección de D en el plano XZ.

Grafico esta proyección:



$-3\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$

ó $5\pi/4 \leq \theta \leq 9\pi/4$

$E = \{ (x,z) : 0 \leq r \leq 4 ,\ \pi/4 \leq \theta \leq 5/4\pi \}$

$x = r\cos\theta$
$z = r\,\text{sen}\,\theta$

$\iint_0^{\sqrt{x^2+z^2}} \frac{5}{(x^2+z^2)}$

SIGUE AL DORSO !

Como la región es simétrica, el intervalo que elegiste funciona.

$$\int_0^{\sqrt{x^2+z^2}} \frac{y}{(x^2+z^2)^2+1}\,dy = \frac{1}{(x^2+z^2)^2+1}\left[\frac{y^2}{2}+c\,\Big|_0^{\sqrt{x^2+z^2}}\right] = ①$$

$$① = \frac{1}{(x^2+z^2)^2+1}\left[\frac{x^2+z^2}{2}+\cancel{c}-\frac{0}{2}-\cancel{c}\right] = ②$$

$$② = \frac{x^2+z^2}{2(x^2+z^2)^2+2}$$

Por tanto me queda:

$$\cancel{\iint_E \frac{x^2+z^2}{2(x^2+z^2)^2+2}\,dA = \int_{\pi/4}^{5/4\pi}\int_0^4 \frac{x^2+z^2}{2(x^2+z^2)^2+2}\,dr}$$

cambio de variable, polar

$$\cancel{\iint_E \frac{x^2+z^2}{2(x^2+z^2)^2+2} = \int_{\pi/4}^{5/4\pi}\int_0^4 r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}$$

polares

$$\iint_E \frac{x^2+z^2}{2(x^2+z^2)^2+2}\,dA = \int_{\pi/4}^{5/4\pi}\int_0^4 \frac{r^2}{2r^4+2}\cdot r\,dr\,d\theta = ③$$

$$③ = \int_{\pi/4}^{5/4\pi}\int_0^4 \frac{r^3}{2r^4+2}\,dr\,d\theta = \cancel{\int_{\pi/4}^{5/4}}$$

SIGO EN OTRA HOJA

$$t = 2r^4 + 2$$
$$dt = 8r^3 \, dx$$

$$\int \frac{r^3}{2r^4+2} \, dr \stackrel{1}{=} \frac{1}{8} \int \frac{1}{u} \, dt = \frac{1}{8} \ln|u| + C$$
$$= \frac{1}{8} \left(\ln|2r^4+2| + C \right)$$

$$\int_{\pi/4}^{5/4\pi} \frac{1}{8} \left(\ln|2r^4+2| + C \right) \Big|_0^4 d\theta = \frac{1}{8} \int_{\pi/4}^{5/4\pi} \ln|2r^4+2| + C \Big|_0^4 d\theta = \circledast$$

$$\circledast = \frac{1}{8} \int_{\pi/4}^{5/4\pi} \ln|2 \cdot 4^4 + 2| + \cancel{C} - \ln|2| - \cancel{C} \, d\theta = \circledast$$

$$\circledast = \left[\frac{1}{8} \left(\ln|2 \cdot 4^4 + 2| - \ln|2| \right) \right] \theta \Big|_{\pi/4}^{5/4\pi} = \circledast$$

$$\circledast = 2{,}44574 6284 = \iiint_D \frac{5}{(x^2+z^2)^2+1} \, dv$$