Excelente !!

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Primer Recuperatorio del Primer Parcial (9/12/2024) - 2do. Cuatrimestre 2024

TEMA 2

| 1 | 2 | 3 | 4 | Nota |
|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | 10 |

Apellido: CATALDI GAGLIARDI Nro. de lib[redacted]Nro de práctica: 1

Nombre: FRANCO Carrera: LIC EN CS. DATOS

1. Sea $C$ la curva dada por la intersección de las superficies

1 SOLO VALOR, GUARDA...

$$x^2 + 2xy + 2y^2 = 1 \qquad \text{y} \qquad ay + z = 1$$

Encontrar $\boxed{\text{el valor}}$ de $a \in \mathbb{R}$ para que la recta tangente a $C$ en el punto $P = (1, 0, 1)$ sea paralela a la recta $L : \lambda(2, -2, 4) + (1, 4, 3)$. Para el valor de $a$ hallado dar la ecuación de la recta tangente a $C$ en el punto $P = (1, 0, 1)$.

2. Analizar la existencia de los siguientes límites. En el caso de que el límite exista, calcularlo.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,-1)} \frac{|y| \operatorname{sen}((y+1)^3) \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{2x^2 + (y+1)^2}$; (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y^3}{x^4 + y^{12}}$

3. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6 + \operatorname{sen}(x^2 y) + 2y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Calcular, si existen, todas las derivadas direccionales de $f$ en $(0, 0)$.

b) ¿Es $f$ diferenciable en $(0, 0)$?

4. Sea

$$F(x, y, z) = x^3 + y + e^{xy(z-1)} - \cos(xyz) + z.$$

a) Demostrar que $F(x, y, z) = 0$ define una función implícita $z = \varphi(x, y)$ en un entorno de $(0, 2, -2)$.

b) Sea $h(x, y) = \varphi(x + y, x - y)$. Hallar $\nabla h(1, -1)$.

**Escribir todos los razonamientos que justifican las respuestas.**

HOJA 1 | FRANCO CATALDI GAGLIARDI

[redacted]

① Bueno, como $\mathcal{C}$ resulta de intersecar $E1 \cap E2$, siendo:

$\Rightarrow E1: \ x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$

$\Rightarrow E2: \ ay + z = 1 \iff z = 1 - at$

La idea para resolver el ejercicio va a ser la siguiente:

a) Interseco E1 con E2, debería quedar $a$ en algún término, y luego, lo parametrizaría todo en función de una variable.

b) Una vez hallé $\mathcal{C}$ tal que vaya $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y describa la imagen de $E1 \cap E2$ voy a buscar aquel $t$ que hace que $\mathcal{C}(t) = P$, con $P = (1,0,1)$.

c) Luego de hallar $t_0$, lo reemplazo en $\mathcal{C}'(t)$, para obtener el vector director de la recta tangente a $\mathcal{C}$ que pase por $P$, pero sin saber el valor de $a$.

d) Ahora, planteo un sistema, del que hallaré valores de $a \in \mathbb{R}$ que lo cumplan pues quiero que $\mathbb{L}$ tg a $\mathcal{C}$ en $P$ $// \ \mathbb{L}': \lambda(2,-2,4) + (1,4,3)$, por lo que quiero que $\vec{v}_{\mathbb{L}}$ sea CL $\vec{v}_{\mathbb{L}'}$.

e) Finalmente, para el valor de $a$ hallado, reemplazo en $\mathcal{C}'(t_0)$ y obtendré $\mathbb{L}$ tg a $\mathcal{C}$ que pase por $P = (1,0,1)$.

⊛ Notar que el valor de $a \in \mathbb{R}$ que cumpla lo pedido, será solo uno, por lo que dice la consigna.

• Estuve probando y probando y probando posibles despejes, sin embargo, al llegar a: $y = \frac{1-z}{a}$, $a \neq 0$, queda algo en función de 3 variables.

• También traté de dejar todo en función de 1 variable, pero no pude

• La verdad, desconozco qué será lo que estoy haciendo mal, porque intenté de mil maneras ya.

*) Noté que $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \cong x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$

$\to 2\left(\frac{x^2}{2} + xy + y^2\right) = 1$ $\to$

~~Ej: $2(x+y)^2 = 1 \iff (x+y)^2 = \frac{1}{2} \iff x^2+2xy+y^2 = \frac{1}{2} \iff 2x^2+4xy+2y^2 = 1 \iff 2(x^2+2xy+y^2) = 1$~~

IGNORAR PORFA :)

$E_2$: $z = 1 - at \Rightarrow$ ~~$2(x^2 + 2xy + y^2)$~~

$\rightarrow \; x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$

$(x+y)^2 + y^2 = 1 \rightarrow$ Círculo de radio 1.

$r = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = r\cos t - y \\ y = r\,\text{sen}\, t \end{cases}, \; t \in [0, 2\pi]$$

$\therefore z = -ay + 1 \Rightarrow z = -ar\,\text{sen}\,t + 1$

$\therefore \mathcal{C}(t) = (\cos t - \text{sen}\,t, \; \text{sen}\,t, \; -a\,\text{sen}\,t + 1), \; t \in [0, 2\pi]$

$\rightarrow$ Busco $t_0$ tq $P = (1,0,1) \in \mathcal{C}$:

$$\begin{cases} 1 = \cos t - \text{sen}\,t & \rightarrow t_0 = 0 \\ 0 = \text{sen}\,t & \rightarrow t_0 = 0 \\ 1 = a\,\text{sen}\,t + 1 & \rightarrow t_0 = 0 \end{cases} \; P \in \mathcal{C} \iff t = 0.$$

$-a$

$\rightarrow \mathcal{C}' = (-\text{sen}\,t - \cos t, \; \cos t, \; a\cos t)$, evalúo en $t = 0 \Rightarrow \mathcal{C}'(0) = (-1, 1, a)$

$\Rightarrow (-1, 1, a) = k(2, -2, 4) =$

$\therefore \iff a = -2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} -1 = 2k \\ 1 = -2k \end{cases} k = \frac{-1}{2}$$

$a = 4k \Rightarrow a = 4 \cdot \frac{-1}{2}$

$\Rightarrow a = -2$

$\therefore$ Pongo $a$ en $\mathcal{C}'(0) = (-1, 1, -2)$

$\therefore$ L tg a $\mathcal{C}$ que pasa por $(1,0,1) = \lambda(-1, 1, -2) + (1, 0, 1)$

HOJA 2 FRANCO CATALDI GAGLIARDI !!

[redacted]

②

B) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 y^3}{x^4 + y^{12}}$

• Comienzo analizando qué pasa, por límites iterados:

$\to \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \dfrac{0}{x^4} = 0\right)$ | $\to \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \dfrac{0}{y^{12}} = 0\right)$

→ Si el límite existe, entonces tiene que dar 0, pruebo por rectas que pasen por el (0,0)

• recta $y = x^{1/3}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3 \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3}{x^4 + \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{12}} \overset{\lim_{x\to 0}}{=} \dfrac{x^4}{x^4 + x^4} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^4}{2x^4} = \dfrac{1}{2} \neq 0$

∴ Como con la recta $y = x^{1/3}$ el límite dió $\frac{1}{2}$, eso implica que el límite <u>NO</u> existe

A) $\lim_{(x,y)\to(0,-1)} \dfrac{|y|\, \mathrm{Sen}\left((y+1)^3\right) \cdot \mathrm{Sen}(1/x)}{2x^2 + (y+1)^2}$

Rigurosamente es 0 · acotado

Como $x \to 0$, pero no es 0 puedo decir que $\mathrm{sen}(\text{algo} \to 0) = 0$, pues $\frac{1}{x}, x \to 0 \cong \mathrm{sen}(\text{algo como } 0) = 0$.

• Como antes, arranco analizando con iterados:

$\to \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to -1} \dfrac{0}{2x^2} = 0\right)$ | $\to \lim_{y\to -1}\left(\lim_{x\to 0} \dfrac{0}{(y+1)^2} = 0\right)$

→ Si el límite existe, entonces tiene que dar exactamente 0.

*) SIGO ATRÁS :)

• recta $y = x-1$, pasa por el $(0,-1)$, cuando $y \rightsquigarrow -1$ ☺ $\lim_{t\to 0} \frac{\text{Sen}}{t}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x-1|\,\text{Sen}(x^3)\,\text{Sen}(1/x)}{2x^2 + x^2 \cong 3x^2} \stackrel{\cdot \frac{x}{x}}{=} \frac{|x-1|\,\text{Sen}(x^3)\,\text{Sen}(1/x)\cdot x}{3x^3}$$

$|0-1| = 1$ ; $\rightsquigarrow 1$

$$= \frac{\rightsquigarrow 0}{3} = 0$$

• Me convencí de que el lim vale 0, ahora voy a probarlo acotando con Sandwich !!

$$\left| \frac{|y|\,\text{Sen}((y+1)^3)\,\text{Sen}(1/x)}{2x^2 + (y+1)^2} - 0 \right| \stackrel{=}{\leq} \frac{|y|\,|\text{Sen}((y+1)^3)|\,|\text{Sen}(1/x)|}{2x^2 + (y+1)^2}$$

*) Trato de agrandar el num y achicar el den, para mantener la des-igualdad !!

-> COTAS :

1) $2x^2 + (y+1)^2 \geq x^2 + (y+1)^2 = \|(x,y)-(0,-1)\|^2$ (denominador)

2) $|\text{Sen}((y+1)^3)| \leq |y+1|^3 \leq \|(x,y)-(0,-1)\|^3$ (numerador)

3) $|y|$, $y \rightsquigarrow -1 \leq 1$, (numerador)

4) $|\text{Sen}(1/x)| \leq 1$ (numerador) pues Sen está acotado !!

-> Quedaría: Tender a 1 no equivale a ser $\leq 1$

$$\leq \frac{1 \cdot \|(x,y)-(0,-1)\|^3 \cdot |\text{Sen}(1/x)|}{\|(x,y)-(0,-1)\|^2} \leq \|(x,y)-(0,-1)\| \cdot |\text{Sen}(1/x)|$$

$\leq \|(x,y)-(0,-1)\| \cdot 1$, pero • $x \rightsquigarrow 0$ • $y \rightsquigarrow -1$ $\Rightarrow \|(x,y)-(0,-1)\| \rightsquigarrow 0$

∴ Como hallé $g \geq f$, cuyo lim da 0, probé por sandwich que el límite del item a) existe, y efectivamente es 0.

*) Notar que apliqué 3 cotas donde agrandé el numerador y 1 donde achiqué el denominador, por lo que se cumple que $f \leq g$. ☺

SA 3 FRANCO CATALDI GAGLIARDI [redacted]

Pues uso un $v = (a,b)$, con $\|v\| = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1)\ v \neq (0,0) \\ 2)\ a^2+b^2=1 \end{cases}$

③ Para chequear si existen $\frac{\partial F}{\partial v}(0,0)$, chequeo el siguiente límite:

A)

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0+ta, 0+tb) - f(0,0)}{t} = \lim \frac{t^6a^6 + \operatorname{Sen}(t^2a^2tb) + 2t^3b^3}{t(t^2a^2+t^2b^2)}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{t^6a^6 + \operatorname{Sen}(t^3a^2b) + 2t^3b^3}{t^3a^2 + t^3b^2 \overset{\circ}{=} t^3(a^2+b^2) \overset{\circ}{=} t^3\cdot 1 \overset{\circ}{=} t^3}$$

Son simplemente "="

→ Puedo separar los límites de esta forma:

I) $\lim_{t\to 0} \frac{t^6a^6}{t^3} = t^3a^6 \rightsquigarrow 0$, pues $t \to 0$

II) $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{Sen}(t^3a^2b)}{t^3} \overset{L'H}{=} \frac{\overbrace{\cos(t^3a^2b)}^{\to 1,\ \text{pues } t^3a^2b \rightsquigarrow 0 \text{ con } t \rightsquigarrow 0}\cdot 3\cancel{t^2}a^2b}{3\cancel{t^2}} = a^2b$

III) $\lim_{t\to 0} \frac{2\cancel{t^3}b^3}{\cancel{t^3}} = 2b^3$

EL LÍMITE DE UNA SUMA ES LA SUMA DE LOS LÍMITES :)

∴ El límite es equivalente a: (I) + (II) + (III) $= a^2b + 2b^3$ que es la expresión que describe $\frac{\partial F}{\partial v}(0,0)$. Luego $\exists\ \frac{\partial F}{\partial v}(0,0)$.

→ Noto que $a^2b + 2b^3$ no es una CL de $(a,b)$, lo que me hace sospechar que no es diferenciable en el $(0,0)$

B) Como dije en a), sospecho que NO es dif. en (0,0), voy a hacer lo siguiente:

Si F es dif, vale que $\frac{\partial F}{\partial v}(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot \vec{v}$

• Voy a hallar $\nabla F$: → PODRÍA HABER REEMPLAZADO EN $\frac{\partial F}{\partial v}$, CON $V = \begin{matrix} (1,0) \equiv f_x \\ (0,1) \equiv f_y \end{matrix}$, MALA MÍA :/

$$\left.\begin{aligned} &\to f_x = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-0}{h} = \frac{h^6}{h^3} = h^3 \rightsquigarrow 0 \\ &\to f_y = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-0}{h} = \frac{2h^3}{h^3} = 2 \end{aligned}\right\} \nabla f(0,0) = (0,2).$$

→ Chequeo si Ⓘ = Ⓘ, siendo:

I): $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y lo remplazo en la expresión de $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$

II): $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y hago $\nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$

Luego si Ⓘ = Ⓘ, significa que mi suposición era errónea !!

I): $\frac{\partial f}{\partial v} = a^2 b + 2b^3 \Big|_{(\vec{v})} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

II): $\nabla f(0,0) \cdot \vec{v} = (0,2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$

∴ Como $\frac{3\sqrt{2}}{4} \neq \sqrt{2}$, el absurdo venía de suponer que f era diferenciable !! en el (0,0).

Por lo que F NO es diferenciable en el (0,0).

✓

(*) ANEXO; NO MOSTRÉ QUE $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ CUMPLE QUE $\|v\| = 1$

$\cdot \|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$

✓

HOJA 4 FRANCO CATALDI GAGLIARDI

[redacted]

(4)

• $F(x,y,z) = x^3 + y + e^{xyz - xy} - \cos(xyz) + z.$

A) Bueno, se me da la curva de nivel 0 y $P(x_0,y_0,z_0)$, tal que $P = (0,2,-2)$

Primero, destaco que F es almenos $C^1$, pues es un conjunto de funciones que varían entre polinomios, trigonométricas y exponenciales.

Para probar el ítem a), voy a usar el TFI, por lo que necesito que:

-) f es almenos $C^1$ ✓

-) $\nabla f(x_0,y_0,z_0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ ✓

-) $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ ✓

-) $F(x_0,y_0,z_0) = 0$, pues es la curva de nivel que me dieron !! ✓

Ahora obteniendo $f_x, f_y, f_z$:

• $f_x = 3x^2 + (yz - y)e^{xyz - xy} + \operatorname{Sen}(xyz) \cdot yz$

• $f_y = 1 + (xz - x)e^{xyz - xy} + \operatorname{Sen}(xyz) \cdot xz$

• $f_z = (xy)e^{xyz - xy} + \operatorname{Sen}(xyz) \cdot xy + 1$

--> Evalúo en el $(0,2,-2)$

$\nabla f(0,2,-2) = (-6, 1, 1) \rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(0,2,-2) \neq 0$ :)

--> Ahora chequeo si $F(0,2,-2) = 0$

$F(0,2,-2) = 0^3 + 2 + e^{0-0} - \cos(0) - 2 = 3 - 3 = 0.$

$\therefore$ Como se cumple todo lo que pedí, luego vale que $F(x,y,z) = 0$ define una función de $z = \varphi(x,y)$ en el $(0,2,-2)$ por TFI !!

---

*) ÍTEM B) ATRÁS

B) $h(x,y) = \varphi(x+y,\ x-y)$. → diferenciable

→ Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dif, luego puedo decir que $g = (x+y,\ x-y)$

$h(x,y) = \varphi \circ g$ , por comodidad, a $\varphi$ lo llamo $f$

$\Rightarrow h(x,y) = f \circ g$ , y pecularmente, por componer a funciones diferenciables

vale que: $Dh = Df \circ g = Df(g(x_0,y_0)) \cdot Dg(x_0,y_0)$

$$\rightarrow \underbrace{Dh(1,-1)}_{\nabla h(1,-1)} = \underbrace{Df(g(1,-1))}_{Df(0,2)} \cdot Dg(1,-1).$$

$$Df(0,2) \overset{TFI}{\Longrightarrow} \nabla f(0,2) = \begin{cases} \bullet\ f_x = \dfrac{-F_x(0,2,-2)}{F_z(0,2,-2)} = -\left(\dfrac{-6}{1}\right) = 6 \\ \bullet\ f_y = \dfrac{-F_y(0,2,-2)}{F_z(0,2,-2)} = -\left(\dfrac{1}{1}\right) = -1 \end{cases}$$

$\therefore Df(0,2) = (6,-1)$.

→ Luego, resta hallar $Dg$:

No la evalúo en $(1,-1)$ pq es CTE :)

$$\Rightarrow Dg = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \nabla h(1,-1) = Dh(1,-1) = (6,-1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (5,7).$$

$$\boxed{\therefore \nabla h(1,-1) = (5,7)}$$ :)